**Universidade de São Paulo**
**DEAS – Departamento de Economia, Administração e Sociologia**

**Série Pesquisa Nº 55**

# Caracterização de Trajetórias de Preços, Fluxos de Caixa e Custos Operacionais em Mercados Futuros através de Simulação Monte Carlo[1]

Adriano Azevedo-Filho

Elisson de Andrade

ISSN 0100-5200

Novembro - 2003

[1] USP/ESALQ/DEAS – Série Pesquisa, P-55, 5 de novembro de 2003 - ISSN 0100-5200
Versão 2.8 – preliminar, sujeita à revisão – para discussão. Pesquisa parcialmente financiada pelo FAPGREP/FEALQ. Contato: adrianoazevedofilho@yahoo.com.br

# Sumário


Abstract 2

Sumário Executivo 3

1. Introdução 10

2. Caracterização da dinâmica de preços em mercados 11

- A contribuição de Bachelier
- Evidências da primeira metade do século XX
- O Modelo logarítmico de Osborne (1959)
- Desenvolvimentos da década de 60
- A hipótese da eficiência em mercados – Fama (1970)
- Modelos de precificação de opções de Black-Scholes e Merton
- Novas metodologias dos anos 70 e 80: Cointegração, ARIMA, GARCH
- O massacrante escrutínio da HEM

3. Simulação de trajetórias de preços e funções destas pelo método Monte Carlo 25

- Exemplos e algoritmos

4. Caracterização do fluxo de caixa e custos operacionais em mercados futuros 44

- Taxas operacionais e tributos
- Custos financeiros associados à margem de garantia e ajustes diários
- Definição de contas para o fluxo de caixa e obtenção do custo da operação
- Definição dos algoritmos para obtenção dos componentes do custo

5. Estimativa de custos operacionais em mercados futuros 57

- Contratos de milho – BM&F – custos de trajetórias observadas
- Contratos de milho – BM&F – caracterização estatística da trajetórias
- Contratos de milho – BM&F – estimativa dos custos pela simulação
- Efeito da volatilidade e número de dias no custo da operação
- Estimativas de custos em novas operações

6. Considerações finais 78

Agradecimentos 84

Referências bibliográficas 84

Apêndice 89

# Characterization of Price Trajectories, Cash Flows and Operational Costs in Futures Markets with Monte Carlo Simulation

Adriano Azevedo-Filho
Elisson de Andrade

## ABSTRACT

This research develops procedures to characterize and simulate – using Monte Carlo methods – price trajectories and cash flows, allowing the estimation of operational costs in futures markets. First, a brief literature review analyses models and ideas about the evolution of prices in markets. This review organizes known facts about the characterization of price trajectories and pointers to methods used to provide a statistical representation for futures prices models. Second, Monte Carlo simulation methods are reviewed. Algorithms describe the overall simulation process of price trajectories and functions of these trajectories. Remarks are presented on the estimation of moments, confidence intervals and probability distributions. Third, definitions and algorithms formalize cash flow evolution (day by day) and costs in futures markets operations, based on price trajectories, exchange rules concerning margins, financial cash flows and taxes. Fourth, operational cost components in futures markets are estimated and quantified in (a) a case study concerning the BM&F corn market and (b) with a theoretical model. The estimation considered observed and simulated price trajectories, derived from ARIMA-GARCH models, estimated from the observed price trajectories. Operational costs are shown to be large and uncertain when operation begins, being strongly dependent on the price trajectory, degree of dependence on borrowed money to manage the cash flow and exposure to taxes. Because these costs apply to both the long and the short positions of the same operation, they affect twice the transaction costs in a single operation. A cost risk concept is introduced and argued as being an additional obstacle to futures markets operations, not found in the literature. In an operation for a single investor (not a firm) and with minimal assumptions, the mean percent cost for a long or a short position, was estimated to range from 2.5 to 4.5 % of the contract initial price, for an operation lasting 120 days, when annualized volatility is 25%. Mean operational costs (as well as uncertainty) tend to increase with larger volatilities and longer operations. Models with more realistic assumptions lead to larger mean cost estimates. Agents who need to borrow money to manage their cash flow will have larger costs than agents who are able to finance operations with their own capital. High interest rates, wide spreads between borrowing and investment rates, and high taxes applied to operations in futures markets are argued as major causes for high and uncertain operational costs. In addition, because there are differences in the cost of money and exposure to taxes for different classes of agents, the ones with smaller costs have more incentive to use futures markets. Agents with large costs can be excluded from these markets. These effects are argued to have economic implications.

# Caracterização de Trajetórias de Preços, Fluxos de Caixa e Custos Operacionais em Mercados Futuros através de Simulação Monte Carlo

Adriano Azevedo Filho
Elisson de Andrade

## Sumário Executivo

1. O trabalho apresenta procedimentos metodológicos para caracterização e simulação de trajetórias de preços e fluxos de caixa, possibilitando a estimativa de custos operacionais em mercados futuros. A apresentação foi organizada em seis seções principais. A primeira seção contém a introdução do trabalho. A segunda seção realiza uma breve análise da literatura e de resultados existentes sobre a dinâmica dos preços em mercados, com o intuito de embasar a definição dos modelos utilizados no trabalho. A terceira seção discute princípios utilizados na simulação Monte Carlo, apresentando modelos simplificados e algoritmos de simulação considerados nas etapas posteriores da pesquisa. A quarta seção formaliza uma definição do conceito de custo operacional e de seus componentes, em uma operação em mercados futuros. Essa definição é obtida a partir da caracterização simplificada do fluxo de caixa, que é dependente: da trajetória dos preços observada, de encargos financeiros, de tributos e de taxas operacionais. A quinta seção apresenta resultados da aplicação dos procedimentos desenvolvidos nas seções anteriores em estudo de caso e em modelo simplificado, visando caracterizar o custo das operações. Finalmente, a sexta seção apresenta considerações finais.

2. Uma dificuldade existente para a estimativa de custos de uma operação em mercados futuros é o fato de que alguns de seus componentes – principalmente tributos e encargos financeiros – dependem fortemente da trajetória de preços que será observada no mercado, não sendo conhecidos com certeza no início desta operação. Outro problema é a dependência dos custos operacionais à situação do agente econômico quanto ao seu grau de necessidade de capital externo e a natureza de sua exposição à tributação. Para agentes mais expostos a tributos e/ou descapitalizados, dependentes da captação de recursos para

fazer frente a margens, ajustes, tributos, e gerenciamento de contratos de um modo geral, os custos tendem a ser mais elevados que para aqueles que dispõem de ampla capacidade própria de recursos financeiros e/ou são menos tributados. A incidência de tributação pode diferir entre agentes econômicos: pessoas físicas e pessoas jurídicas possuem distintos regimes de tributação – alguns tipos de pessoa jurídica podem ser isentos de certos tributos (ex. cooperativas).

3. Os custos operacionais estimados neste trabalho referem-se ao caso em que o agente é uma pessoa física, sendo obtidos a partir de procedimentos que consideram a evolução do fluxo de caixa da operação, condicionados por trajetórias de preços: (a) observadas em contratos futuros; (b) simuladas a partir de modelos estatísticos (ARIMA-GARCH) que capturam aspectos relevantes de trajetórias observadas no mercado; e, (c) simuladas através de modelos que só dependem da volatilidade e do número de dias da operação. Deve-se destacar que os custos para outros agentes (pessoa jurídica tributada com base no lucro real ou no lucro presumido, instituições isentas de certos tributos etc.) podem ser diferentes dos custos operacionais apresentados neste trabalho, sendo assunto de pesquisas futuras.

4. Os resultados obtidos sugerem que os custos de operações em mercados futuros podem ser expressivos. Para uma pessoa física, numa operação de 60 dias, sob pressuposições minimalistas, os custos operacionais médios atingiram valores entre 1,5 e 2% do valor inicial do contrato (Figura 5.8, pág. 75), quando a volatilidade anualizada foi de 20%. Os valores apresentados dependem da situação da pessoa física com relação à necessidade de captação de recursos – o menor valor refere-se ao caso de agentes com ampla capacidade própria de financiamento da operação, chamados no trabalho de agentes capitalizados; o valor maior corresponde ao caso de agentes que necessitam captar recursos no mercado para financiar suas operações, ou seja, agentes descapitalizados (essas considerações valem para os próximos resultados). Para uma operação com 120 dias, esse custo operacional médio variou entre 2,5 e 3,5%. A parcela correspondente ao IRPF, nesse caso, foi aproximadamente 1,5% do valor inicial do contrato, para agentes capitalizados ou descapitalizados. Quando a volatilidade considerada foi de 30% os custos médios

observados estiveram entre 2,5 e 3% e entre 3 e 4,5%, para 60 e 120 dias, respectivamente. Os resultados apresentados assumem taxas de juros nas aplicações e nas captações, respectivamente, de 1,2% e 3,75% ao mês. Em situações práticas, as taxas de captação podem ser muito superiores a esse valor, nas condições atuais do mercado, o que levaria a custos ainda mais elevados. Do lado das aplicações, assume-se que os saldos positivos de ajustes podem ser investidos à taxa de aplicação considerada (algo facilitado pelo FIF, um fundo que remunera os saldos positivos dos ajustes diários). Os custos apresentados foram obtidos a partir de modelos simplificados que foram muito úteis para caracterizar a natureza do impacto da volatilidade e tempo (em dias) da operação, nos custos da operação. Esses modelos tenderam, de um modo geral, a estimar custos inferiores aos custos obtidos por modelos mais complexos e mais aderentes à realidade, também examinados na pesquisa.

5. É importante perceber que os custos apresentados no parágrafo anterior são aplicáveis às duas contrapartes de uma mesma operação, tanto na posição vendida como na posição comprada. Isso significa que a participação do custo operacional em uma transação será a composição dos valores médios obtidos para as duas contrapartes. É possível ainda que numa operação os custos operacionais para a posição vendida e a posição comprada sejam diferentes (assimétricos), em função da forma com que os encargos financeiros e a tributação são aplicados. Numa posição de venda, uma trajetória de preços ascendente pode motivar o pagamento de um elevado volume de encargos financeiros, pelo uso de recursos externos para depósito dos ajustes diários. Para o contrato de compra, por outro lado, pode haver um expressivo recebimento de juros decorrentes da aplicação dos ajustes positivos recebidos, mas os desembolsos com tributação podem ser elevados. Um exemplo que destaca esses efeitos, analisado neste trabalho, é ilustrado pelo contrato do milho com vencimento em JAN03, onde o preço passou, em 120 dias, de R$ 16,20 para R$ 27,00, por saca de 60 kg. Se uma operação fosse realizada nesse período, para um contrato de venda, os custos associados a encargos financeiros chegariam a 9,85% do valor inicial do contrato, para um agente descapitalizado, e 3,12% para um agente capitalizado (Tabelas 5.3 e 5.4, pág. 60). O IRPF pago seria nulo nesse caso e os custos operacionais totais seriam de 4,18% e 12,2%, para os agentes capitalizados e

descapitalizados, respectivamente. Nessa mesma situação, para um contrato de compra, teria havido um recebimento de juros equivalente a 3,57%, e um pagamento de IRPF equivalente a 15,06%, com um custo operacional de 13,6% do valor inicial do contrato. Se os agentes mantivessem suas posições pelos 120 dias, teriam sido esses os custos observados, que foram muito diferentes (assimétricos) para posições vendida e comprada. Se um agente capitalizado, na posição comprada, fosse isento de IRPF, teria terminado sua operação com ganhos líquidos associados aos juros recebidos. As diferenças podem ser acentuadas se as operações envolverem agentes com diferentes graus de capitalização e exposição à tributação.

6. Um aspecto importante observado foi a expressiva incerteza que existe no início da operação quanto ao valor dos custos operacionais ao seu final. Numa operação com 60 dias, considerando uma volatilidade anualizada de 25% e agentes descapitalizados, o custo total médio foi próximo de 2,5%, podendo variar, de acordo com a trajetória, entre 0 e cerca de 7% (Figura 5.9, pág. 76). Os resultados mostraram que a incerteza pode crescer quando aumenta o número de dias da operação e a volatilidade. Depende também da natureza do processo estatístico que caracteriza a dinâmica dos preços (para uma mesma volatilidade e número de dias).

7. A incerteza com relação ao custo em uma operação em mercados futuros pode ser caracterizada como um risco de custo, um conceito que acreditamos ser novo e particularmente importante para as operações no mercado futuro brasileiro. Esse risco de custo, ao lado do risco de base, pode dificultar operações, pelo impedimento de um *hedge* que possa efetivamente fixar o preço (e margens em operações de arbitragem). Esse problema seria menos sério se o custo fosse fixo, conhecido exatamente no início da operação, algo que pode não ocorrer.

8. Há algumas implicações econômicas importantes decorrentes de custos expressivos, incertos e assimétricos entre agentes. Custos elevados e incertos tendem a reduzir o benefício de uma operação de fixação de preços via mercados futuros, inibindo negociações e favorecendo a fixação de preços por outros mecanismos que também

podem garantir preços futuros e eventualmente adiantar recursos: CPRs, fixação de preços junto a *traders* e processadores etc. Os preços fixados por esses outros mecanismos, contudo, tendem a incorporar deságios que podem ser, em parte, motivados pelos custos e incertezas existentes na fixação de preços pelo mercado futuro. Agentes econômicos mais capitalizados e/ou menos expostos a tributos, podem ser mais estimulados a utilizar o mercado futuro que agentes descapitalizados e/ou mais expostos à tributação. Essa situação é de uma certa forma perversa, pois mostra que há barreiras de acesso ao mercado futuro (via custos de operação mais elevados) para muitos agentes que potencialmente poderiam se beneficiar dessas operações (ex. produtores rurais do tipo pessoa física). Para trabalhos que estimam a razão ótima de *hedge* as implicações podem ser grandes, em decorrência de que em geral assumem custos baixos e fixos nas operações. Um entendimento mais completo das implicações econômicas desses resultados, contudo, exigirá um esforço de pesquisa que foge ao escopo deste trabalho.

9. Deve-se destacar que, na literatura internacional, os custos operacionais em mercados futuros tendem a ser assumidos como sendo de pequena magnitude quando comparados a outros custos e, por essa razão, usualmente desconsiderados. Essa pressuposição, apesar de muito utilizada (explicitamente ou implicitamente) na literatura brasileira sobre mercados futuros, parece ser pouco realista. Cabe discutir aqui algumas razões que motivam esses custos elevados e incertos, em magnitude potencialmente muito superior à observada em outros países.

10. Uma primeira razão deve-se a: (a) taxas de juros elevadas praticadas no Brasil, em geral mais elevadas das taxas praticadas em outros países; e, (b) diferença significativa entre as taxas para aplicação e captação. Esses dois fatos encarecem as operações, especialmente para os agentes econômicos descapitalizados, que precisam captar recursos para manutenção de suas operações de fixação de preços. As taxas de juros afetam os componentes do custo operacional associados à margem de garantia e do fluxo de caixa em geral. Os custos associados à margem podem, porém, ser conhecidos com relativa certeza no início de uma operação, o que não acontece com os custos dependentes de ajustes diários, que são incertos. As distorções existentes nas taxas de juros acabam tendo

como conseqüência perversa o afastamento dos agentes econômicos mais descapitalizados. Esses agentes, em muitos casos, são os que mais podem se beneficiar das operações nesses mercados.

11. Uma segunda razão deve-se à tributação. Em operações envolvendo pessoas físicas, analisadas no trabalho, o IRPF é elevado e produz distorções. Da forma que é definido, o imposto acaba motivando uma parte considerável do custo e da incerteza em uma operação, favorecendo com isso a utilização de outras formas de fixação de preços que são menos tributadas (ou mesmo não tributadas). Como os tributos (IRPF e CPMF, no caso de pessoa física) dependem da trajetória seguida pelos preços, contribuem significativamente para o componente incerto do custo da operação. Não é clara a justificativa econômica para a tributação, tanto do lado da magnitude das alíquotas definidas quanto do lado das regras para cálculo dos tributos, que podem inibir operações que são importantes para reduzir riscos em muitas situações.

12. Os procedimentos desenvolvidos podem ser estendidos para a análise de outras situações envolvendo agentes do tipo pessoa jurídica, com diferentes regimes de tributação, cooperativas ou instituições financeiras, que em alguns casos são isentas de certos tributos. Essa extensão da análise torna-se interessante dado que são operadores típicos nos mercados futuros. Os custos operacionais para esses agentes podem ser diferentes dos obtidos neste trabalho, em função de outros mecanismos de tributação. A extensão dos procedimentos para esses e outros casos, entretanto, é assunto para futuros trabalhos.

13. Finalmente, um mérito importante deste trabalho é sugerir que o custo de operações no mercado futuro, no Brasil, pode ser muito superior a valores práticos freqüentemente considerados (ex. 0,64%), que tendem a levar em consideração, simplesmente, as taxas operacionais (TOB, registro e emolumentos). A pesquisa apresenta estimativas desses custos operacionais para pessoas físicas, argumentando que podem ser elevados. Mostra também que esses custos são incertos no início da operação, caracterizando um risco de custo, que juntamente como o risco de base e outros custos de transação, podem

desestimular operações em mercados futuros. Ao considerarmos que as duas contrapartes da operação estão sendo oneradas, o custo transacional associado à operação (podem existir outros) é a composição dos custos operacionais de cada contraparte, que podem ser assimétricos. Esforços na direção da mitigação desses custos e de sua incerteza, podem favorecer um maior interesse pela utilização dos mercados futuros como mecanismo de fixação de preços futuros. Iniciativas como o FIF, o uso do Funcafé para financiamento de margens e ajustes (no caso do café) e o Fundo Futuro Agropecuário (Banco do Brasil e BM&F), podem ser importantes para a redução do custo operacional. Com relação à tributação incidente em mercados futuros, é difícil entender sua justificativa econômica nos moldes atuais. Tal tributação tende a introduzir distorções desnecessárias e inibir operações nos mercados futuros importantes dentro do gerenciamento de riscos associados a variações não antecipadas de preços, ou mesmo câmbio.

# Caracterização de Trajetórias de Preços, Fluxos de Caixa e Custos Operacionais em Mercados Futuros através da Simulação Monte Carlo

Adriano Azevedo Filho
Elisson de Andrade

## 1. Introdução

Este estudo discute a caracterização e simulação de séries de preços, fluxos de caixa e custos operacionais dentro de operações em mercados futuros. Os procedimentos desenvolvidos são aplicados à estimativa de certos custos existentes nessas operações associados a tributos, taxas operacionais, margem de garantia e ajustes diários, obtidas a partir de trajetórias de preços compatíveis com parâmetros estatísticos que caracterizam a dinâmica do mercado. As técnicas apresentadas podem facilitar a quantificação de custos dependentes da evolução do fluxo de caixa em operações financeiras, que envolve regras específicas para pagamento de tributos e encargos financeiros, facilitando a análise de operações de *hedge* e arbitragem. Um estudo de caso e um modelo teórico, representativo de operações no mercado, ilustram a aplicação da metodologia apresentada.

Uma preocupação existente é a simulação do comportamento dos preços de uma forma consistente com fatos estilizados conhecidos na literatura, os quais são examinados. O estudo compara o desempenho da simulação realizada por modelos estatísticos alternativos, que consideram diferentes graus de complexidade e aderência à realidade. Essa comparação tem o objetivo de avaliar a sensibilidade dos resultados aos modelos utilizados, verificando se os modelos mais simples podem solucionar satisfatoriamente o problema em questão.

O trabalho contém mais cinco seções. A segunda seção realiza uma breve análise da literatura e resultados existentes a respeito da caracterização da evolução dos preços em mercados, com o intuito de embasar a definição dos modelos desenvolvidos no trabalho. A terceira seção discute princípios utilizados na simulação Monte Carlo,

apresentando modelos simplificados e algoritmos de simulação utilizados nas etapas posteriores da pesquisa. A quarta seção envolve a caracterização simplificada do fluxo de caixa em uma operação em mercados futuros, a partir da trajetória de preços observada, encargos financeiros, tributos e taxas operacionais. A quinta seção apresenta os resultados da aplicação dos procedimentos desenvolvidos nas seções anteriores em estudo de caso e em modelo teórico, visando caracterizar o custo operações no mercado futuro brasileiro. Finalmente, a sexta seção apresenta considerações finais.

## 2. Caracterização da dinâmica de preços em mercados

A dinâmica dos preços em mercados vem sendo formalmente estudada pelo menos desde o final do século XIX, em larga medida com o intuito de verificar a possibilidade de previsão do comportamento do mercado e fundamentar a precificação de derivativos.

### Contribuição de Bachelier

O trabalho pioneiro na caracterização da evolução de preços em mercados é atribuído a Louis Bachelier (1900). Em sua tese de doutorado, o matemático francês introduziu a noção de que os preço no mercado evoluiriam de uma forma aleatória seguindo um movimento Browniano, sendo, portanto, imprevisíveis. Essa pressuposição teria, como conseqüência, que a esperança de ganhos em operações especulativas tenderia a zero. Os argumentos apresentados foram suficientes para convencer Henri Poincaré, um dos mais famosos matemáticos da época, que era orientador do trabalho de Bachelier em Sorbounne.

Em síntese, Bachelier sugeriu, com respeito à evolução dos preços de derivativos na Bolsa de Paris, que o preço desses derivativos num período *t*, indicado por $P_t$, a partir da informação existente até o período *t*-1, podia ser razoavelmente representado pelo modelo

$$P_t = P_{t-1} + \Delta r_t \qquad (2.1)$$

onde $P_t$ é o preço no início do período *t*, e $\Delta r_t$ é uma variável aleatória i.i.d. (independente e identicamente distribuída) ao longo dos períodos, com $E(\Delta r_t) = 0.$ O modelo de Bachelier assumia que as variações diárias $\Delta r_t$ tinham distribuição normal. Isso era atrativo do ponto de vista matemático, mas não eliminava a possibilidade de preços negativos, algo indesejável do ponto de vista econômico.

Bachelier estudou as conseqüências de sua hipótese, estabelecendo bases teóricas para a precificação de opções. Analisou suas idéias frente ao comportamento dos preços de derivativos na Bolsa de Paris, encontrando suporte empírico para o modelo proposto. A contribuição de Bachelier foi surpreendente: os métodos e resultados obtidos são próximos aos existentes em desenvolvimentos recentes. Na época, contudo, o seu trabalho ficou restrito a uma pequena comunidade de matemáticos – Kolmogorov foi influenciado por suas idéias – capaz de compreender a inovação e aplicabilidade dos novos métodos desenvolvidos, argumentam Cortault et al. (2000), em nota biográfica sobre a vida e obra de Bachelier.

**Evidências da primeira metade do século XX**

Durante a primeira metade do século XX, desconhecendo o trabalho de Bachelier, autores como A. Cowles (1933), H. Working (1934) e J. Kendall (1953), utilizando séries de preços de ações e *commodities* no mercado dos EUA e Inglaterra, mostraram evidências fortes suportando a hipótese de imprevisibilidade dos preços em mercados. O trabalho de Cowles (1933) é particularmente interessante pelos testes que fez sobre qualidade das previsões realizadas por dezenas de analistas de mercado. Apresenta evidências fortes suportando a noção de que a seleção aleatória de investimentos na bolsa possibilitaria chances de ganho ou prejuízo similares às seleções de investimentos realizadas por analistas profissionais.

No meio da década de 50 o trabalho de Bachelier foi redescoberto por Leonard Savage, que o trouxe à atenção de Paul Samuelson, relata Bernstein (1992). Tanto Samuelson quanto seus alunos foram influenciados pelas idéias de Bachelier. Robert Merton, um desses alunos, viria a ganhar o prêmio Nobel de economia décadas depois, em 1997, por seu trabalho realizado na precificação de opções, com modelos que aprimoram as idéias apresentadas originalmente por Bachelier.

**O modelo logarítmico de Osborne (1959)**

Osborne (1959) apresenta uma contribuição importante no final da década de 50, ao argumentar que seria a diferença entre os logarítmos naturais de preços observados entre 2 períodos que teria distribuição normal. O argumento de Osborne foi atrativo e embasado em análise da evolução dos preços no mercado de ações, na Bolsa de Nova York. Um dos aspectos interessantes do modelo apresentado por Osborne era a impossibilidade de preços negativos, algo que o modelo de Bachelier não excluía. Esse modelo, em sua versão discreta, pode ser representado por

$$\ln(P_t) = \ln(P_{t-1}) + r_t . \qquad (2.2)$$

Nessa formulação, $r_t$ é uma variável aleatória i.i.d. (independente e identicamente distribuída), com distribuição Normal$(0, \sigma^2)$. Uma conseqüência algébrica direta dessa formulação é

$$P_t = P_{t-1} e^{r_t} \qquad (2.3)$$

onde $e^{r_t}$ tem distribuição log-normal (pelas propriedades das distribuições normal e log-normal, vide Mood et al.,1974). O termo $r_t$, definido por $\ln(P_t / P_{t-1})$, representa a taxa de crescimento geométrico, em capitalização infinita. O valor de $r_t$ tende a ser, usualmente, muito próximo da taxa de variação observada de um período para outro quando o valor da taxa é pequena (inferior a 0,10) ou seja $e^{r_t} \approx (1 + r_t)$.

Decorre de (2.3) que o preço no período *t* também terá distribuição log-normal, o que garante que será estritamente positivo, algo que não ocorrerá necessariamente na formulação especificada em (2.1). Em função da log-normalidade de $e^{r_t}$, temos que

$$E(e^{r_t}) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{2.3.1}$$

onde $E(r_t) = \mu$ e $Var(r_t) = \sigma^2$. Nessa situação, a partir da informação existente até o período *t*-1, para garantir que

$$E(P_t) = P_{t-1} \tag{2.4}$$

tal como ocorria em (2.1), é necessário que $E(e^{r_t}) = 1$ ou, que a condição

$$E(r_t) = -\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{2.5}$$

seja verificada. Osborne assumia que $\mu = 0$, o que levava a $E(P_t) = P_{t-1}e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$ ou, aproximadamente, $E(P_t) \approx P_{t-1}(1+\frac{1}{2}\sigma^2)$. Usava esse fato para justificar que tendências históricas observadas de crescimento no preço de ações eram conseqüência do processo estocástico associado à evolução dos preços, se $\mu = 0$, tendo pouca relação com variáveis econômicas.

No modelo apresentado nos últimos parágrafos, o desvio padrão $\sigma$, é freqüentemente usado para caracterizar a volatilidade do comportamento dos preços. Nesse modelo, se o tempo é medido em dias, $\sigma$ será caracterizado como a volatilidade diária, que costuma ser expressa na base anual, por $\sigma\sqrt{m}$, onde *m* é o número de dias de funcionamento do mercado (245 a 260, em geral, assumido 254 nesse trabalho). Esse

resultado pode ser obtido facilmente, partindo do fato de que nesse modelo, o preço em $t+m$, dependerá das várias taxas de variação futuras observadas, de acordo com

$$P_{t+m} = P_t \, e^{r_1 + r_2 + \ldots + r_m}$$

onde $R_m = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ , representa a taxa de variação no período $m$. Mas,

$$V(R_m) = V(r_1 + r_2 + \ldots + r_m),$$

e, pelo fato das taxas serem consideradas i.i.d e pelas propriedades da variância,

$$V(R_m) = \sigma^2 \, m \, .$$

Decorre dessa última expressão, que o desvio padrão de $R_m$, representado por $\sigma_m$, é definido por

$$\sigma_m = \sigma\sqrt{m}, \qquad (2.5.1)$$

onde $\sigma$ é a volatilidade diária e $m$ é o período considerado em dias. Essa notação pode ser facilmente adaptada a outros períodos que não o diário, inclusive para situações em que o tempo é medido de forma contínua.

**Desenvolvimentos na década de 60**

Durante a primeira metade do século XX, evidências de autocorrelação nas variações de preços, observadas em algumas situações, tendiam a ser consideradas exceção à regra. Working (1960) e Alexander (1961), em trabalhos independentes, mostraram que essas exceções poderiam ser explicadas por problemas metodológicos. Demonstram que séries cujos preços são médias de períodos (ex. preços mensais obtidos a partir da média dos preços diários), podem exibir variações

autocorrelacionadas, mesmo que as variações nos dados diários não apresentem autocorrelação.

Na década de 60, Granger & Morgenstern (1963) e Fama (1965), utilizando um instrumental estatístico mais aprimorado, realizam testes empíricos exaustivos em séries temporais de preços, corroborando resultados obtidos anteriormente por outros autores. Fama (1965) argumenta que mesmo quando é observada autocorrelação estatisticamente significativa, algo que mostra não ser incomum entre variações de preços de ações, ela teria pouco significado prático. A autocorrelação observada por Fama foi de magnitude insuficiente para justificar uma estratégia que poderia se beneficiar do resultado, em decorrência dos custos de transação existentes. Fama e Blume (1966) mostram outros casos em que existe alguma possibilidade de ganho através de estratégias derivadas de análises técnicas ou grafistas, mas que esses ganhos também seriam pequenos e próximos dos custos de transação existentes.

Um aspecto descritivo importante analisado por Fama (1965) é o fato de que a distribuição empírica das variações de preços, obtida pela diferença entre os logaritmos (do preço em um período e do preço no período anterior), como sugerido por Osborne (1959), em lugar de apresentar comportamento próximo da normalidade, tendia a apresentar um formato como o apresentado na Figura 2.1. Nessa figura, a linha cheia representa a distribuição empírica e a linha tracejada uma normal, ambas com mesma esperança e mesma variância. A distribuição empírica tende a ser mais leptocúrtica que a normal, refletindo uma curtose maior. Esse fenômeno, freqüentemente observado na análise empírica da distribuição das variações de preço, é caracterizado na literatura com adjetivo “cauda gorda” (*fat tail* em inglês). Ou seja, a distribuição tende a se parecer mais com uma t-Student (com poucos graus de liberdade) que propriamente com uma distribuição normal. Fama (1965) aponta algumas possíveis causas para esse fenômeno associadas à natureza do processo gerador das variações de preços. Caso esse processo apresentasse variância condicional não-constante (ou mesmo alterações na esperança em certos períodos), a distribuição incondicional das variações seria uma mistura de distribuições. O

resultado observado ocorreria até mesmo se as distribuições condicionais fossem normais.

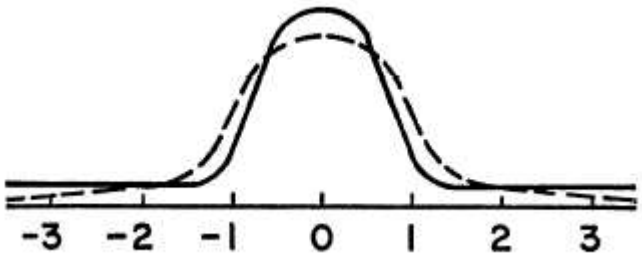


Figura 2.1 Formato empírico da distribuição das taxas de variação de preços (linha cheia) e formato da distribuição normal (linha tracejada), em Fama (1965)

Samuelson (1965) e Mandelbrot (1966) interpretam as implicações dos resultados apontando para a imprevisibilidade dos preços, no contexto da teoria econômica, sugerindo que, quando os mercados estão funcionando de uma forma apropriada, a informação existente acaba sendo internalizada rapidamente pelos agentes econômicos nos preços praticados, o que rapidamente mitigaria a possibilidade de ganhos especulativos. Jensen (1968) apresenta um estudo suportando essa noção a partir dos retornos observados em 115 fundos de investimento durante um período de 10 anos. Mostra que as vantagens aparentes nos retornos observados em alguns fundos (na média essas vantagens nem mesmo existiam) acabavam se desfazendo quando considerados os custos de administração.

Esses resultados não agradaram (e não agradam) os profissionais do mercado defensores da análise técnica (ou grafista) e/ou análise fundamentalista. Os grafistas buscam padrões na evolução dos preços que acreditam se repetir, dando margem a ganhos certos em determinadas situações. Os fundamentalistas, por outro lado, estudam exaustivamente os fundamentos dos mercados que poderiam sugerir estratégias vencedoras a partir da observação de certos aspectos incompatíveis com os

preços praticados (ex. se os estoques estão baixos, então podem existir fundamentos justificando o crescimento dos preços futuros, em níveis superiores aos atuais).

**A Hipótese da Eficiência em Mercados – Fama (1970)**

As noções existentes sobre imprevisibilidade foram formalizadas em Fama (1970) na "hipótese da eficiência do mercado – HEM." Fama caracterizou 3 formas de eficiência: fraca, semi-forte e forte. Na eficiência fraca, toda a informação passada, contida nos dados existentes das negociações em um certo mercado, estaria refletida nos preços praticados, não havendo a possibilidade de ganhos sistemáticos derivados de estratégias fundamentadas nessas informações. Na eficiência semi-forte, os preços praticados refletiriam, adicionalmente, toda a informação disponível ao público (incluindo a informação disponível para caracterização da eficiência fraca). Na eficiência forte, os preços refletiriam toda a informação que caracterizaria a eficiência semi-forte, e, adicionalmente, refletiria também informações privadas (incluindo a *inside information*). Fama (1970) caracteriza testes para essas formas de eficiência e sumariza a literatura existente até então. Como conclusão importante, afirma que "a evidência existente em suporte da hipótese da eficiência do mercado é extensiva e (de uma forma muito única em economia) a evidência contrária é esparsa" [tradução do autor]. Nos anos seguintes outros autores testaram exaustivamente as formas de eficiência caracterizadas em Fama (1970), auxiliados pela crescente disponibilidade de novos resultados e metodologias estatísticas, assim como recursos computacionais mais acessíveis.

**Modelos de precificação de opções de Black-Scholes e de Merton**

Na década de 70 ocorre um marco importante dentro dos procedimentos para precificação de derivativos a partir de modelos que caracterizam a evolução de preços de ações ou contratos futuros. Black e Scholes (1973), utilizando um modelo contínuo de variações de preços – cujas pressuposições quanto evolução de preços são comparáveis à versão apresentada por Osborne (1959) – apresentam uma solução exata para a precificação de opções. Robert Merton (1973) chega a resultados

similares, independentemente. Rapidamente o novo método apresentado passa a ser utilizado em larga escala pelo mercado, que estava carente de fundamentos mais sólidos para precificação de opções. Essa contribuição rendeu o prêmio Nobel de economia a M. Scholes e R. Merton em 1997 (Black já havia falecido anos antes).

**Novas metodologias dos anos 70 e 80 – Cointegração, ARIMA, GARCH**

Granger e Newbold (1974) caracterizam, com um simples exemplo, uma situação comum que pode condicionar uma correlação espúria entre variáveis, que testes tradicionais indicariam ser estatisticamente significativa. A situação apresentada foi a simples regressão linear entre observações temporais das variáveis *Y* e *X*, cada uma delas definida por um processo aleatório como o representado em (2.1):

$$Y_t = Y_{t-1} + e_{yt}, \quad t = 1, \cdots, n,$$

$$X_t = X_{t-1} + e_{xt}, \quad t = 1, \cdots, n,$$

onde os erros observados $e_{yt}$ e $e_{xt}$ são independentes. Numa regressão linear simples definida por

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + e_t, \quad t = 1, \cdots, n,$$

os testes estatísticos convencionais costumam rejeitar a hipótese $b_1 = 0$. Além disso, os erros tendem a apresentar correlação positiva, fatos que contrariam a intuição. O uso das diferenças entre os valores das variáveis no tempo, ou integração, seria uma forma possível de tratar o problema detectado, ou seja, se a regressão for

$$\Delta Y_t = b_1 \Delta X_t + e_t, \quad t = 1, \cdots, n, \tag{2.6}$$

onde $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ e $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ a nulidade de $b_1$ não será rejeitada e os erros $e_t$ não serão correlacionados. Essa observação, generalizada a outras situações, deu origem aos estudos e testes de cointegração, formalizados em Engle e Grange (1987).

Esses estudos estabeleceram uma importante linha de pesquisa, ampliando os procedimentos utilizados para caracterização da eficiência em mercados.

Na área metodológica, a crescente disponibilidade de técnicas específicas para análise e caracterização de séries temporais, durante a década de 70, popularizaram métodos para identificação e estimação dos modelos da família ARIMA (AutoRegressive-Integration-Moving Average). Esses modelos, sistematizadas didaticamente em livros texto como Box e Jenkins (1976), apresentam recursos abrangentes para caracterização estatística de séries de dados temporais. Os modelos ARIMA podem caracterizar, simultaneamente, num único modelo, 3 aspectos importantes em séries temporais: a autocorrelação (AR), a ordem de integração (I), e a dependência em médias móveis (MA). Uma série onde a autocorrelação pode atingir a ordem *c*, sumarizada por AR(*c*), pode ser representada por

$$Y_t = \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \cdots + \theta_c Y_{t-c} + e_t, \tag{2.7}$$

onde $e_t$ é um erro aleatório, i.i.d, com esperança zero. Uma série onde ocorrem efeitos associados à média móvel (MA), de ordem *d*, sumarizada por MA(*d*), pode ser representada por

$$Y_t = \phi_1 e_{t-1} + \phi_2 e_{t-2} + \cdots + \phi_d e_{t-d} + e_t, \tag{2.8}$$

onde $e_t$ é um erro aleatório, i.i.d, com esperança zero. A situação que inclui, simultaneamente, efeitos autoregressivos e de média móvel, de ordem *c* e *d* respectivamente, sumarizada por ARMA(*c*,*d*), pode ser genericamente representada por

$$Y_t = \theta_1 Y_{t-1} + \cdots + \theta_c Y_{t-c} + \phi_1 e_{t-1} + \cdots + \phi_d e_{t-d} + e_t, \tag{2.9}$$

onde $e_t$ é um erro aleatório, i.i.d, com esperança zero. O modelo pode incluir uma constante.

A ordem de integração é definida pelo número de diferenças consideradas para a variável de interesse, em que a ordem zero é a própria variável, a ordem 1 é a diferença entre o valor em *t* e o valor em *t*-1, e assim por diante. Logo, um modelo ARIMA (*c,i,d*) indica que a autocorrelação é considerada até a ordem *c*, a integração até ordem *i* e o efeito de média móvel até a ordem *d*. Um modelo ARIMA (2,1,1) seria representado por:

$$\Delta Y_t = \theta_1 \Delta Y_{t-1} + \theta_2 \Delta Y_{t-2} + \phi_1 e_{t-1} + e_t, \qquad (2.10)$$

onde $e_t$ é um erro aleatório, i.i.d, com esperança zero. O modelo ARIMA básico apresentado, em sua versão univariada, pode ser estendido de diversas formas, com o objetivo de representar processos incluindo variáveis explicativas e outros aspectos. O diagnóstico, especificação e estimação desses modelos são apresentados de forma didática em livros texto sobre o assunto, como Hamilton (1994) e Mills (1997).

Nos anos 80, um novo salto metodológico ocorre com o trabalho de Engle (1982). Esse autor – agraciado pelo prêmio Nobel em 2003 por essa contribuição – desenvolveu modelos estatísticos que possibilitam caracterizar melhor certos fenômenos empíricos relacionados à volatilidade em séries temporais de preços. Em particular, apresenta uma família de modelos denominada ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedastic) para caracterizar (e estimar) o fato empiricamente observado de que em séries de variação de preços a volatilidade condicional (medida pela variância) tende a ser correlacionada positivamente no tempo, apresentando períodos (*clusters*) de volatilidade mais alta e períodos (*clusters*) de volatilidade mais baixa. Bollerslev (1986) generaliza o trabalho de Engle (1982), com uma família de modelos denominada GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic), a qual inclui a família ARCH como caso particular.

A representação geral do modelo GARCH(p,q), para o caso de séries univariadas, onde definimos por $\Omega_{t-1}$ a informação disponível no período *t*-1 é apresentada a seguir:

$$Y_t = E(Y_t \mid \Omega_{t-1}) + \xi_t$$

$$\xi_t = z_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} b_i \xi_{t-i}^2 \qquad (2.11)$$

onde $z_t$ é uma variável aleatória i.i.d.com esperança zero e variância unitária. A distribuição de probabilidade de $z_t$ não precisa necessariamente ser uma normal. Os parâmetros a serem estimados são $a_0, \cdots, a_p$ e $b_1, \cdots, b_q$. O modelo ARCH, desenvolvido por Engle, seria o caso particular do GARCH, quando *p*=0. Nesse modelo, $\sigma_t^2$ representa a variância condicional do erro, dada a informação disponível até o período *t*-1, ou seja $\Omega_{t-1}$. Atendidas as restrições quanto aos valores dos parâmetros, explicitadas em Bollerslev (1986), a variância incondicional do erro seria definida por

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} b_i} \qquad (2.12)$$

Uma apresentação didática dos modelos GARCH e de outros modelos mais simples para tratamento da variância condicional é apresentada por Engle (2001). Andersen et al. (2002, 2003) examina aprimoramentos existentes para essa classe de modelos, considerando generalizações multivariadas, métodos alternativos de estimação e outros casos de interesse. A combinação dos modelos ARIMA e GARCH é uma

dessas possibilidades que dá acesso a um amplo espectro de modelos para representação do comportamento de séries de preços.

Outras estratégias complementares para estimação de modelos flexíveis para caracterização de séries temporais e previsão incluem o filtro de Kalman, cujos procedimentos estão sistematizados em livros texto como Harvey (1989) ou os modelos lineares dinâmicos descritos em West e Harrison (1987,1997).

O esforço empreendido no desenvolvimento e implementação computacional de um instrumental metodológico sofisticado, especialmente a partir da década de 70, possibilitou que idéias importantes sobre o comportamento dos preços nos mercados de ações e mercados futuros de *commodities* pudessem ser verificadas.

**O massacrante escrutínio da HEM**

O poderoso arsenal de métodos desenvolvido nas décadas de 70 e 80 possibilitou uma melhor caracterização estatística das séries temporais de variações de preços, permitindo o desenvolvimento de testes mais rigorosos para a hipótese da eficiência do mercado, nos vários sentidos colocados por Fama (1970).

Anomalias no comportamento dos preços no mercado, reveladas por diversos autores, estão sistematizadas em trabalhos como Fama (1991), Clarke et al. (2001), Dimson e Mussavian (2000) e Lima (2003). Nos mercados futuros de *commodities*, autores como Cargill e Hauser (1975), Taylor (1985) e Leuthold (1991) mostram anomalias que os levam a rejeitar a idéia de que modelos como os apresentados em (2.1) e (2.2) poderiam representar fielmente o comportamento dos preços em diversas situações.

Uma linha importante de contestação de eficiência informacional do mercado, de natureza teórica, foi estabelecida por Grossman e Stiglitz (1980). Nesse trabalho, que sistematiza pesquisas anteriores, os autores colocam limites teóricos para a HEM a partir de um modelo que mostra que a validade da HEM levaria a evidentes

contradições. Egelkraut et al. (2003) apresentam uma revisão da literatura e evidências dentro dessa linha de pesquisa, nos mercados de milho e soja.

Apesar das muitas anomalias reveladas e algumas dificuldades teóricas, a noção de que os preços se comportariam de uma forma imprevisível continua sobrevivendo confortavelmente como o principal modelo simplificado da realidade, usado para caracterizar certos aspectos fundamentais do comportamento de mercados de ações e mercados futuros. Modelos de precificação de opções como o Black-Scholes, usados freqüentemente no mercado, assumem pressuposições muito simples com relação à imprevisibilidade dos preços, similares às utilizadas por Osborne (1959), definidas em (2.3). Possivelmente, dentro de todos os pressupostos usualmente aceitos dentro da economia, a HEM foi o menos abalado pelos testes massacrantes aos quais foi submetido, concluem Clarke et al. (2001).

Richard Roll, pesquisador reconhecido na área de finanças que foi vice-presidente da Goldman Sachs e administrador de fundos de investimento, sugere em Roll (1994) uma série de conselhos úteis para diretores financeiros de empresas. Com relação ao comportamento dos preços no mercado e a possibilidade de ganhos na exploração de potenciais ineficiências, Roll argumenta que:[2]

> *"Depois de 25 anos ouvindo alegações sobre a ineficiência do mercado e 10 anos tentando explorá-la eu mesmo como um gerente de investimentos, eu me convenci de que o conceito de eficiência de mercado deve ser muito bem aprendido por diretores financeiros de empresas. A noção de eficiência no mercado é uma aproximação de primeira ordem da realidade muito útil para organização dos pensamentos sobre o funcionamento do mercado. Eu suspeito bastante de estudos que revelam anomalias sistemáticas ... no comportamento do mercado... Na última década tentei explorar as ineficiências mais promissoras, investindo quantias pesadas em regras de trading que visavam tirar proveito dessas ineficiências... Nunca consegui*

[2] Tradução dos autores.

*achar uma regra ou estratégia que funcionasse. E veja que nas funções que ocupei, freqüentemente tinha acesso às idéias mais promissoras antes mesmo que elas fossem publicadas ou se tornassem amplamente disponíveis, o que permitia testá-las em primeira mão ... O conceito de eficiência do mercado é muito simples: a competição fará com que os benefícios potenciais de uma nova regra de trading sejam compensados pelos custos de implementação ... a primeira pessoa que desenvolve um método sofisticado, uma rede neural para analisar o comportamento de um certo mercado, talvez consiga pagar o custo do desenvolvimento do método... mas não a milésima."*

Concluindo, dentro desse trabalho, são apresentados procedimentos que possibilitam a simulação de trajetórias de preços tanto com modelos simples como o descrito em (2.2) e (2.3), como por modelos mais complexos e mais aderentes à realidade, derivados da implementação de modelos ARIMA e GARCH. Uma preocupação importante é a verificação do impacto do grau de refinamento utilizado na solução dos problemas tratados na pesquisa.

## 3. Simulação de trajetórias de preços e funções destas pelo Método Monte Carlo

O uso da simulação em modelagem é uma técnica fundamental para a solução problemas quando é difícil, muito trabalhoso, ou mesmo impossível, o uso de métodos analíticos exatos. A modelagem através de métodos analíticos exige modelos parcimoniosos que podem ser pouco aderentes à realidade em muitos casos. Através de técnicas de simulação, é possível o desenvolvimento de modelos complexos, mais aderentes à realidade. Herbert Simon (1996) caracteriza a simulação como uma técnica essencial para o entendimento do funcionamento de sistemas complexos, especialmente quando o comportamento desse sistema não pode ser facilmente inferido a partir das propriedades das partes que dele fazem parte. Em muitas situações é difícil estabelecer as implicações condicionadas por certas premissas. Nesses casos, a simulação pode ser útil para caracterizar as implicações derivadas das

premissas consideradas, gerando com isso conhecimentos previamente inexistentes. Dentro deste trabalho, o problema central é justamente o entendimento das conseqüências de pressuposições alternativas sobre o comportamento das trajetórias de preços em mercados futuros sobre fluxos de caixa e custos operacionais, algo pouco formalizado.

No passado, a utilização da simulação era dificultada pela disponibilidade limitada de recursos computacionais. Especialmente quando eram necessárias muitas simulações para obtenção dos resultados de interesse dentro de limites preestabelecidos de precisão, num intervalo de tempo aceitável. A disponibilidade cada vez maior de recursos computacionais, ao longo das últimas duas décadas, vem favorecendo a utilização de soluções fundamentadas em simulação.

A simulação estocástica ou realizada a partir do Método Monte Carlo, na sua forma mais básica, parte de um procedimento (um gerador) que possibilita o sorteio de números aleatórios entre 0 e 1, para sortear números com qualquer distribuição de probabilidade.

A base teórica que garante esse resultado é o teorema da transformação integral de probabilidades, detalhado em Mood et al. (1974). Esse teorema garante que, a partir de uma seqüência de números aleatórios entre 0 e 1, com distribuição uniforme e independente, e da função inversa da função de distribuição probabilística que caracteriza o fenômeno que desejamos simular, podemos gerar uma seqüência de números aleatórios com essa distribuição desejada. Ocorre, contudo, que muitas vezes é difícil inverter, analiticamente, a função de distribuição de interesse. Nesses casos pode-se recorrer a uma aproximação dessa função, ou mesmo utilizar outro método de simulação. Bratley et al.(1983), Law e Kelton, (1991) e Robert e Casella (1999) descrevem diversas técnicas para a simulação de números aleatórios tais como a aceitação-rejeição ou métodos específicos envolvendo transformação, assim como procedimentos que visam otimizar a simulação.

A geração de números aleatórios entre 0 e 1 com distribuição uniforme, independentes, algo aparentemente simples, não é tarefa trivial. Os geradores existentes, implementados em software, produzem seqüências que se aproximam bastante do ideal, mas têm limitações, sendo por isso chamados de geradores de números pseudo-aleatórios.

A simulação Monte Carlo (e suas extensões) é o método mais geral disponível para caracterização estatística de funções de variáveis aleatórias. No presente trabalho, a técnica é usada exatamente nesse contexto, para conhecer estatísticas de funções não triviais de uma trajetória futura de preços de um dado contrato no mercado futuro. Para melhor caracterizar o problema, assumimos que estamos no período 0 e usamos

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m \tag{3.1}$$

para representar as variáveis aleatórias que definem os preços de ajuste ao final de cada período desde o período 1 até período *m*, quando termina a operação. Suponha que o interesse presente é sobre a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória *Y*, definida como sendo uma função *g*(.) das variáveis aleatórias que definem a seqüência de preços futuros ou seja

$$Y = g(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m)\,. \tag{3.2}$$

Na apresentação a seguir, a função *g*(.) pode ser univariada ($m \times 1$) ou, em geral, multivariada ($m \times v$), onde *v* é a dimensão de *Y* para cada trajetória de preços. A função *g*(.) poderia ser uma função de interesse, por exemplo, $\max(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m)$, ou seja, o máximo valor observado nos *m* períodos. A função pode depender de outros parâmetros, como na função $\max(K - P_m, 0)$, o resultado de uma opção *put* européia onde *K* é o preço de exercício. No caso multivariado $m \times 2$ a função *g*(.) poderia ser, por exemplo,

$$g(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m) = \begin{bmatrix} \max(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m) \\ \max(K - P_m, 0) \end{bmatrix}. \qquad (3.2.1)$$

Na próxima seção caracterizaremos funções relativamente não triviais, associadas ao fluxo de caixa de operações em mercados futuros.

Se a distribuição de probabilidade multivariada de $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m$ fosse perfeitamente conhecida e fosse disponível um método para sortear (usando técnicas de simulação) seqüências a partir dessa distribuição de probabilidade, poderíamos obter o valor de *Y* resultante de cada uma dessas seqüências. Supondo que obtivemos *n* seqüências por

$$\begin{aligned} Y_1 &= g(P_{11}, P_{12}, P_{13}, \cdots, P_{1m}) \\ Y_2 &= g(P_{21}, P_{22}, P_{23}, \cdots, P_{2m}) \\ &\vdots \\ Y_n &= g(P_{n1}, P_{n2}, P_{n3}, \cdots, P_{nm}) \end{aligned} \qquad (3.3)$$

onde o primeiro subescrito representa o número da seqüência simulada, é possível responder qualquer questão sobre a distribuição de *Y*, lançando-se mão da Lei dos Grandes Números, um dos principais resultados da estatística. No caso de *g*(.) ser uma função univariada, a esperança e a variância, assim como todos os momentos da distribuição de probabilidade de *Y*, , podem em geral ser facilmente estimados pelas contrapartes amostrais: média, variância amostral e momentos amostrais, em decorrência da Lei dos Grandes Números:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i^k}{n} = E(Y^k) \qquad (3.4)$$

ou seja, o valor do momento absoluto amostral de ordem *k* converge (em probabilidade) para o momento absoluto teórico de ordem *k*, para a variável aleatória *Y*. Esse resultado somente depende de condições de regularidade como a existência dos momentos teóricos (Mood et al., 1974). Por exemplo, a esperança matemática que

corresponde ao momento absoluto teórico de ordem $k$=1, pode ser estimada pelo momento absoluto amostral de ordem $k$=1. A precisão dos momentos amostrais, encontrados a partir de $n$ simulações, pode estimada através do intervalo de confiança apropriado. Para a esperança matemática, por exemplo, o intervalo de confiança, a um nível de confiança $p$, é estimado por

$$\overline{Y}_n \pm t_{p,n-1} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \tag{3.4}$$

onde $\overline{Y}_n$ é a média, $s_n$ é o desvio padrão amostral, obtidos a partir de $n$ simulações, e $t_{p,n-1}$ é o valor crítico que define, para uma variável aleatória $T$ com distribuição t-Student com $n$-*1* graus de liberdade,

$$\Pr(T \leq t_{p,n-1}) = \frac{p}{2}. \tag{3.5}$$

Como $n$ é usualmente um número superior a 1000, $t_{p,n-1}$ pode ser bem aproximado por $z_p$, o valor crítico que define, para uma variável $Z$ com distribuição normal padronizada,

$$\Pr(Z \leq z_p) = \frac{p}{2}. \tag{3.6}$$

Os valores de $z_p$ para níveis críticos usuais, considerando níveis de significância correspondentes a $p$=0,95 e $p$=0,99, são, respectivamente, 1,960 e 2,576 (aproximados para 3 decimais).

Frequentemente, a simulação é usada para estimar

$$\Pr(a \leq Y \leq b) \tag{3.7}$$

ou seja, a probabilidade de observarmos realizações da variável de interesse $Y$ dentro do intervalo [$a$,$b$]. Nesse caso, basta que seja definida uma variável aleatória $X$, que assume 1 quando $a \leq Y \leq b$ e valor 0 em outros casos.

Do ponto de vista teórico, como essa variável *X*, por definição, terá distribuição de probabilidade Bernoulli, será verdade que $E(X) = \Pr(a \le Y \le b)$, dado que os eventos $a \le Y \le b$, e $X = 1$ são equivalentes do ponto de vista probabilístico. Esse fato leva a probabilidade de $X = 1$ a ser idêntica a $\Pr(a \le Y \le b)$. A estimativa de $\Pr(a \le Y \le b)$ pode, então, ser obtida pela média de $X_1, X_2, \cdots, X_m$, que nada mais é do que a freqüência de observações onde $X = 1$.

Os valores de $X_1, X_2, \cdots, X_n$ podem ser encontrados a partir dos valores de $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, simulados a partir dos procedimentos explicitados em (3.5). Nesse caso, a precisão pode ser estimada a partir do intervalo de confiança derivado anteriormente em (3.6), ou mesmo a partir de métodos estatísticos Bayesianos. Nesse último caso, a distribuição exata de probabilidade de $\Pr(a \le Y \le b)$, derivada a partir da *n* simulações, pode ser representada uma distribuição Beta, com parâmetros definidos a partir do número de observações em que $X = 1$. Esse resultado depende da pressuposição de que o conhecimento *a priori* sobre $\Pr(a \le Y \le b)$ é representado por uma distribuição uma distribuição Uniforme (0,1).

O próprio formato da distribuição de probabilidade de *Y* pode ser estimado diretamente dos valores simulados, a partir de procedimentos descritos em Silverman (1989) e Scott (1992).

Os resultados apresentados para o caso de *g*(.) univariada podem ser generalizados para o caso multivariado $m \times v$. Nessa situação, cada trajetória de preços resultará num vetor *Y* de dimensão $v > 1$. Também nesse caso, a Lei dos Grandes Números possibilita a estimativa do grau de associação estatística dos elementos desse vetor através das estatísticas amostrais. Em particular, se $v = 2$, seria possível utilizar a correlação amostral entre as 2 variáveis que caracterizam o vetor $Y$, a partir das *n* simulações realizadas. Essa correlação amostral, pela Lei dos Grandes Números, e atendidas condições de regularidade, converge em probabilidade para a correlação teórica.

**Exemplos e Algoritmos**

A seguir são apresentados 3 exemplos que ilustram procedimentos descritos nos parágrafos anteriores, caracterizados por algoritmos simplificados, formalizados em linguagem estruturada. São desenvolvidos em grau crescente de complexidade, com o objetivo de facilitar o entendimento de um algoritmo geral para simulação de séries de preços definidas a partir de um processo ARIMA-GARCH, e dos desenvolvimentos das próximas seções. Ilustram também a adição de mais complexidade aos modelos visando uma melhor aderência à realidade e as possíveis conseqüências em termos de custos e benefícios. Para cada exemplo, é apresentado um algoritmo para obtenção da solução desejada. As situações tratadas incluem diferentes modelos estatísticos usados para caracterização das séries temporais de preços, assim como problemas técnicos associados à sua implementação. Esses algoritmos foram, posteriormente, implementados em programas desenvolvidos na linguagem associada ao software estatístico R (versão 1.7.1), para efeito de obtenção dos resultados desejados.

**Exemplo A** – Um investidor, ao final do dia 0, quando o preço de fechamento observado para o contrato futuro de certa *commodity* foi $ 15, deseja realizar inferências sobre o máximo valor que pode atingir o preço de fechamento desse contrato durante os próximos 50 dias de operação desse mercado. Como está fazendo uma operação de *hedge*, esse conhecimento pode ser útil para dimensionamento dos recursos necessários para fazer frente a potenciais ajustes diários. Estudos empíricos sobre esse contrato indicam que o comportamento dos preços pode ser representado a partir do modelo sugerido originalmente por Osborne (1959), formalizado anteriormente pelas equações (2.2) a (2.5). Os estudos empíricos realizados estimaram o valor da volatilidade diária, $\sigma$, como sendo igual a 0,016, correspondente a 0,25, aproximadamente, em base anual (considerando 254 dias de operação no ano). O investidor assume que o preço no dia 0 é uma estimativa não viesada do preço ao final dos 50 dias.

Para resolver esse problema é necessário que se realize, inicialmente, a simulação de *n* trajetórias de 50 preços a partir da distribuição multivariada de probabilidade de

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{50} \tag{3.8}$$

que depende, nesse caso, das pressuposições descritas em (3.1) – (3.3) e do fato conhecido, $P_0 = 15.$ Para definição da trajetória *i*=1, das *n* trajetórias que desejamos simular, podemos simular

$$r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, \cdots, r_{i,50}\ ,\ i = 1, \tag{3.8.1}$$

onde $r_{ij}$ é um valor simulado de uma distribuição Normal$(-\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$, onde $\sigma = 0{,}016$ é a volatilidade diária especificada no problema. Considera-se $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$, para incorporar a noção de que o preço no período 0 é uma estimativa não tendenciosa do preço no período *m*, conforme a discussão apresentada na seção 2 do trabalho. Outras pressuposições poderiam ser utilizadas.

A partir dos valores simulados, seria definida a primeira trajetória de preços pelo procedimento recursivo definido por

$$P_{i,t} = P_{i,t-1} e^{r_{i,t}},\ i = 1 \quad e \quad t = 1, \cdots, 50, \tag{3.9}$$

onde $P_{i,0} = 15,$ o que definiria a trajetória 1 por

$$P_{11}, P_{12}, P_{13}, \cdots, P_{1,50}.$$

Para essa primeira trajetória, o valor de $Y_1$, resultado derivado da função da trajetória de interesse, genericamente especificada por *g*(.) em (3.2) e (3.3), é o máximo dos valores observados em uma dada trajetória. Para *i*=1, temos

$$Y_i = \max(P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, \cdots, P_{i,50}). \quad (3.10)$$

Para simulação das outras trajetórias, de 2 a *n*, o processo realizado em (3.8) a (3.10) deve ser repetido com *i*=2, ...,*n*, o que possibilitaria a obtenção da seqüência de *n* valores máximos ou seja

$$Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n \quad (3.11)$$

Os procedimentos apresentados nos últimos parágrafos podem ser sumarizados pelo algoritmo 3A descrito na Figura 3.1, onde *g*(.) é a função max(.), *m*=50 e $P_0 = 15.$ No algoritmo, os índices correspondentes às simulação foram omitidos em algumas variáveis, em função de não serem de fato necessários para o processo computacional. Em cada simulação (e às vezes em cada período) as mesmas variáveis são redefinidas sempre que possível, sem qualquer prejuízo. O programa que implementou o algoritmo foi utilizado também para estimar a esperança, o desvio padrão, a probabilidade do máximo preço ser igual ou superior a 20 e a própria distribuição de probabilidade de *Y*, a partir dos valores simulados e procedimentos descritos em parágrafos anteriores.

As estimativas foram obtidas a partir de experimentos que consideraram 1.000, 10.000 e 100.000 simulações, representadas nos algoritmo por *n*. A Tabela 3.1 apresenta o resultado dessas simulações. A Figura 3.2 apresenta uma estimativa da própria distribuição de probabilidade, a partir de procedimentos descritos em Silverman (1989) e Scott (1992), considerando um kernel gaussiano, utilizando o experimento com 100.000 simulações.

**Algoritmo 3A**

*inicio*

*especifique:* $P_0$, $\sigma$, $\mu$, ***m***, ***n***, *função* ***g****(.)*

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, n$ *, faça* {

*para* $t \leftarrow 1, \cdots, m$ *faça* {

*simule* $r \sim$ *Normal(*$\mu$ *,* $\sigma^2$ *)*

*limite* $r_t$ *à máxima oscilação permitida*

$P_t \leftarrow P_{t-1} e^r$

}

$Y_i \leftarrow g(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n)$

}

*estime momentos amostrais a partir de* $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_m$

*estime probabilidades de eventos de interesse*

*estime a distribuição de probabilidade de* $Y$

*fim*

Figura 3.1 Algoritmo utilizado para simulação de funções de trajetórias de preços, à partir das taxas de variação (Exemplo A).

| Parâmetro | Estimativas obtidas em cada Experimento (número de simulações) | | |
|---|---|---|---|
| | 1.000 | 10.000 | 100.000 |
| E($Y$) | 16,173 | 16,243 | 16,242 |
| Intervalo confiança a 99% | 16,08 a 16,26 | 16,21 a 16,27 | 16,23 a 16,25 |
| Pr($Y \geq 20$) | 0,0060 | 0,0076 | 0,0076 |
| Intervalo confiança a 99% | -0,0003 a 0,0012 | 0,0054 a 0,0098 | 0,0069 a 0,0083 |

Tabela 3.1 Estimativas da E($Y$) e Pr($Y \geq 20$) pela média amostral e seus intervalos de confiança a 99% de probabilidade (Exemplo A, Algoritmo 3A)

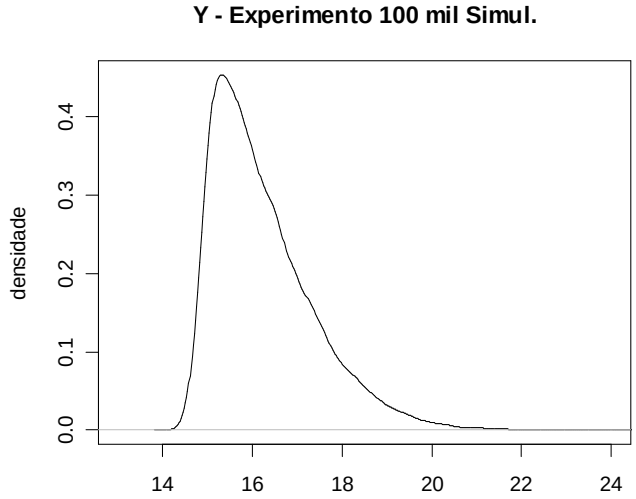


Figura 3.2 Estimativas da distribuição de probabilidade de Y (Exemplo A, Algoritmo A)

**Exemplo B** – Mesma situação do Exemplo A, com a diferença que nesse caso observa-se empiricamente que as taxas de variação dos preços têm uma autocorrelação de ordem 1. Especificamente,

$$r_t = \theta\, r_{t-1} + \xi_t, \tag{3.12}$$

$$\xi_t \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2). \tag{3.13}$$

Esse modelo é idêntico ao utilizado no Exemplo A, quando $\theta = 0$. Deseja-se estimar a esperança do máximo valor observado, para $\theta = 0$, $\theta = 0{,}10$, $\theta = 0{,}20$ e $\theta = 0{,}30$ e três níveis de volatilidade diária, 0,0125, 0,0160 e 0,019, que correspondem, aproximadamente, às volatilidades anualizadas 20%, 35% e 30%. Os experimentos deverão ser realizados com 10.000 simulações. Tem-se também como informação conhecida o valor de $r_0$, 0,002, obtido por $r_0 = \ln(P_0 / P_{-1})$, a partir de informações disponíveis no período 0. Considere $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$, como no exemplo anterior.

A autocorrelação existente nesse modelo traz algumas complicações que devem ser examinadas. Em geral, na simulação, em decorrência de (3.12) e condicional à informação existente no tempo *t*-1, temos

$$E(r_t) = \theta\, r_{t-1} + E(\xi_t) \tag{3.14}$$

$$V(r_t) = \sigma^2 \tag{3.15}$$

Como

$$E(P_t) = P_{t-1} E(e^{r_t})$$

usando o resultado teórico de (2.3.1), e pressuposições utilizadas no Exemplo A, chega-se a

$$E(P_t) = P_{t-1} e^{\theta\, r_{t-1}} \tag{3.16}$$

ou seja, somente se $\theta = 0$ fica garantido $E(P_t) = P_{t-1}$ independentemente dos valores observados para $r_t$.

O algoritmo proposto para solução do problema especificado no Exemplo B, para $\theta$ e $\sigma$ (volatilidade diária) definidos, é apresentado na Figura 3.3. Os resultados dos experimentos requeridos para resposta às questões de interesse, obtidos a partir de 10.000 simulações, são apresentados nas Tabelas 3.2 e 3.3. Esses resultados mostram o impacto de introduzir a autocorrelação nas a trajetórias de preços e na estimativa da esperança do máximo valor observado, assim como na probabilidade de termos em algum momento preços futuros iguais ou superiores a $ 20. O efeito de um $\theta$ mais alto tende a ser amplificado em cenários de volatilidades mais elevadas. Tanto $\theta$ quanto $\sigma$ contribuem positivamente para o crescimento da esperança e da probabilidade de valores mais extremos, um resultado que também pode ser observado teoricamente, a custa de desenvolvimentos analíticos.

**Algoritmo 3B - AR(1)**

*início*

*especifique:* $P_0$, $r_0$, $\theta$, $\mu$, $\sigma$, ***m***, ***n***, *função* ***g(.)***

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, n$, *faça* {

*para* $t \leftarrow 1, \cdots, m$ *faça* {

*simule* $\xi$ ~ *Normal(*$\mu$, $\sigma^2$*)*

$r_t \leftarrow \theta\, r_{t-1} + \xi$

*limite* $r_t$ *à máxima oscilação permitida*

$P_t \leftarrow P_{t-1} e^{r_t}$

}

$Y_i \leftarrow g(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m)$

}

*estime momentos amostrais a partir de* $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$

*estime probabilidades de eventos de interesse*

*estime a distribuição de probabilidade de* $Y$

*fim*

Figura 3.3 Algoritmo utilizado para simulação de funções de trajetórias de preços, com autocorrelação das taxas de ordem 1 – AR(1), (Exemplo B).

| θ | Volatilidade Anualizada | | |
|---|---|---|---|
| | 0,20 | 0,25 | 0,30 |
| 0 | 15,97 | 16,25 | 16,48 |
| 0,10 | 16,06 | 16,38 | 16,61 |
| 0,20 | 16,18 | 16,51 | 16,82 |
| 0,30 | 16,33 | 16,74 | 17,05 |

Tabela 3.2 Estimativas da E($Y$) pela média amostral (Exemplo B, Algoritmo 3B)

| θ | Volatilidade Anualizada | | |
|---|---|---|---|
| | 0,20 | 0,25 | 0,30 |
| 0 | 0,001 | 0,007 | 0,021 |
| 0,10 | 0,002 | 0,018 | 0,038 |
| 0,20 | 0,007 | 0,028 | 0,062 |
| 0,30 | 0,012 | 0,048 | 0,089 |

Tabela 3.3 Estimativas Pr($Y \geq 20$) pela média amostral (Exemplo B, Algoritmo 3B)

**Exemplo C** – Mesma situação do Exemplo A, com a diferença que nesse caso observa-se empiricamente que as taxas de variação dos preços têm uma autocorrelação de ordem 1 e que a variância condicional do erro não é homogênea, comportando-se como num modelo GARCH(1,1). Essa especificação é comum como representação adequada de muitas séries temporais de variação de preços. Especificamente,

$$r_t = \theta\, r_{t-1}, + \xi_t \tag{3.17}$$

$$\xi_t = z_t \sigma_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{3.18}$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \sigma_{t-1}^2 + b_1 \xi_{t-1}^2 \tag{3.19}$$

$$z_t \sim \text{Normal}(0,1) \tag{3.20}$$

Esse modelo é idêntico ao utilizado no Exemplo A, quando $\theta = 0,\ a_1 = 0,\ e\ b_1 = 0.$ Nas expressões (3.18) e (3.19), $\sigma^2$ representa a variância incondicional e $\sigma_t^2$ representa a variância condicional à informação existente no período *t*-1. Nesse caso deseja-se estimar a esperança do máximo valor observado dos preços, para $\theta = 0$, $\theta = 0{,}10$, $\theta = 0{,}20$ e $\theta = 0{,}30$, e para três níveis de volatilidade diária, incondicionais, de 0,0125, 0,0160 e 0,019, que correspondem, aproximadamente, às volatilidades anuais, incondicionais, 0,20, 0,25 e 0,30. Os experimentos deverão ser realizados com 10.000 simulações. Tem-se também como informação conhecida o valor de $r_0$, 0,002, obtido por $r_0 = \ln(P_0 / P_{-1})$, a partir de informações disponíveis no período 0. Os valores dos parâmetros que definem a variância condicional são $a_1 = 0{,}3\ \ e\ \ b_1 = 0{,}2$. Os valores de $a_0$ considerados são, respectivamente, 0,00007825, 0,000128 e 0,0001805, os quais levam o desvio padrão incondicional aos valores 0,0125, 0,0160 e 0,019, em razão de (2.12). A variância condicional, no período 0, é assumida idêntica à variância incondicional (em outras situações poderia ser representada pela variância incondicional estimada para o período 0).

O algoritmo proposto para solucionar o problema é apresentado na Figura 3.4. Esse algoritmo foi implementado na linguagem R, segundo procedimentos já descritos. Os resultados obtidos são similares aos observados nas Tabela 3.2 e 3.3. Para o caso extremo tratado no Exemplo B, onde $\theta = 0{,}30$ e a volatilidade anualizada é 0,30, um experimento com 10.000 simulações encontrou $\overline{Y} = 17{,}06$, com intervalo de confiança para a 99%, definido por [17,01; 17,11]. O valor encontrado para o exemplo B, nas mesmas condições com relação a volatilidade e autocorrelação, vide tabela 3.2, foi $\overline{Y} = 17{,}05$. As estimativas de $\Pr(Y \geq 20)$, obtidas para os casos B e C, foram também muito próximas. Esse exemplo mostra que, no caso da função *g*(.) considerada, a modelagem da dinâmica dos preços de uma forma mais complexa não foi capaz de modificar a magnitude das estimativas desejadas e introduziu custos e dificuldades desnecessárias. O experimento que utilizou o algoritmo C demorou cerca de 3 vezes mais tempo para ser executado que o realizado com o algoritmo B. Adicionalmente, a maior complexidade do algoritmo C aumenta as chances de erros nas várias etapas requeridas para sua implementação.

Os exemplos anteriores introduziram procedimentos de simulação que incluíam, em ordem crescente de complexidade, aspectos empíricos freqüentemente observados em séries temporais de variações de preços. Para completar essa seção, apresentamos um algoritmo mais geral, na Figura 3.5, voltado à simulação de séries de preços cujas taxas de variação podem ser representadas por um processo ARIMA(c,0,d)-GARCH(p,q). Na situação mais elementar, quando os parâmetros associados aos processos ARIMA e GARCH são idênticos a zero, o algoritmo é funcionalmente equivalente ao algoritmo A. O algoritmo 3D depende do conhecimento inicial de uma série de parâmetros, usualmente estimados a partir de procedimentos apropriados. Em particular, depende do conhecimento da ordem e parâmetros dos modelos ARIMA e GARCH, do preço no período 0, das variâncias condicionais de períodos anteriores a 0, da esperança de $\xi_t$, representada por $\mu$, que pode ser especificada por (2.5) ou outra pressuposição, das taxas $r_t$ e valores de $\xi_t$ observados antes e até período 0, para atendimento à inicialização do modelo. A definição dos valores de $\xi_t$

observados antes do período 0, a partir de $\mu$ e $\sigma^2$ (a variância incondicional), pode ser realizada a partir do procedimento prático proposto, por exemplo, em Laurent e Peters (2002), o qual é considerado no algoritmo 3D, o que não exclui outras possibilidades, inclusive a utilização de resíduos de modelos estatísticos desenvolvidos para estimação dos parâmetros.

**Algoritmo 3C - AR(1)-GARCH(1,1)**

*inicio*

*especifique:* $P_0$ , $r_0$ , $\theta$ , $\mu$ , $\sigma$ , $\sigma_0$ , $a_0$ , $a_1$ , $b_1$ , ***n, m****, função* ***g****(.)*

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, n$ *faça* {

*simule* $\xi_0 \sim$ *Normal(*$\mu, \sigma^2$*)*

*para* $t \leftarrow 1, \cdots, m$ *faça* {

*simule* $z \sim$ *Normal(*$0, 1$*)*

$$\sigma_t \leftarrow \sqrt{a_0 + a_1 \sigma_{t-1}^2 + b_1 \xi_{t-1}^2}$$

$$\xi_t \leftarrow z\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2$$

$$r_t \leftarrow \theta\, r_{t-1} + \xi_t$$

*limite* $r_t$ *à máxima oscilação permitida*

$$P_t \leftarrow P_{t-1} e^{r_t}$$

}

$$Y_i \leftarrow g(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m)$$

}

*estime momentos amostrais a partir de* $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$

*estime probabilidades de eventos de interesse*

*estime a distribuição de probabilidade de* $Y$

*fim*

Figura 3.4 Algoritmo utilizado para simulação de funções de trajetórias de preços, com autocorrelação das taxas de ordem 1, AR(1) e variância condicional não homogênea(Situação C) representada por um processo GARCH(1,1)

**Algoritmo 3D - ARIMA(c,0,d)-GARCH(p,q)**

*inicio*

*especifique:* $P_0$ , $\sigma$ , $\mu$ , $a_0$ , ***n***, ***m***, *p, q, c, d, função* ***g****(.)*

$a_1, a_2, \cdots, a_p$ , $b_1, b_2, \cdots, b_q$

$r_0, r_{-1}, \cdots, r_{1-c}$

$\sigma_0, \sigma_{-1}, \cdots, \sigma_{1-p}$

$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_c$ , $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_d$

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, n$ *faça* {

*simule* $\xi_0, \xi_{-1}, \cdots \xi_{1-\max(d,q)} \sim$ *Normal(*$\mu$ , $\sigma^2$*)* *(ou inicializado)*

*para* $t \leftarrow 1, \cdots, m$ *faça* {

*simule* $z \sim$ *Distribuição*$(0, 1)$ *(Normal, t-Student, etc.)* *(veja 2.11)*

$$\sigma_t \leftarrow \sqrt{a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j \xi_{t-j}^2}$$

$$\xi_t \leftarrow z\sigma_t + \mu$$

$$r_t \leftarrow \sum_{j=1}^{c} \theta_j \, r_{t-j} + \sum_{j=1}^{d} \phi_j \xi_{t-j} + \xi_t$$

*limite* $r_t$ *à máxima oscilação permitida*

$$P_t \leftarrow P_{t-1} e^{r_t}$$

}

$$Y_i \leftarrow g(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m)$$

}

*estime momentos amostrais a partir de* $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$

*estime probabilidades de eventos de interesse*

*estime a distribuição de probabilidade de* $Y$

*fim*

Figura 3.5 Algoritmo utilizado para simulação de funções de trajetórias de preços, com autocorrelação das taxas de ordem 1, AR(1) e variância condicional não homogênea(Situação C) representada por um processo GARCH(1,1)

## 4. Caracterização do fluxo de caixa e custos operacionais em mercados futuros

Esta seção examina o problema da caracterização do fluxo de caixa de um agente econômico em operações em mercados futuros. Um dos objetivos dessa análise é o interesse existente pela modelagem e caracterização de custos operacionais, decorrentes de margem de garantia, ajustes diários, taxas operacionais e tributos.

A análise assume que o tempo é medido em dias de operação do mercado e que o agente econômico inicia a operação no período 0, adquirindo um contrato futuro de venda que irá liquidar no período *m*. O resultado dessa operação, no período *m*, pode ser representado por

$$R = A - \mathrm{CT}(P_0^f, P_1^f, \cdots, P_m^f, \vec{K}) \tag{4.1}$$

onde $A$ é o valor do ajuste acumulado, definido por $P_0^f - P_m^f$, $\mathrm{CT}(P_0^f, P_1^f, \cdots, P_m^f, \vec{K})$ são custos de operação, dependentes da trajetória dos preços observada no mercado futuro, e de $\vec{K}$, um vetor de parâmetros que caracterizam taxas de juros, tributos, taxas operacionais etc., assumidos como conhecidos no início da operação. O preço utilizado reflete o valor total do contrato, e não o preço unitário da *commodity* considerada nesse contrato. Essa notação visa facilitar a análise, dado que alguns custos são especificados por contrato. Como as estimativas de custo serão expressas no final da análise em termos percentuais, é possível traduzir facilmente os custos e seus vários componentes, em bases comparáveis.

Em geral, alguns desses parâmetros podem ser incertos (ex. taxas de juros), alterando-se ao longo da operação, mas serão considerados conhecidos e fixos para efeito deste trabalho. A incerteza com relação ao valor desses custos vem da incerteza associada às possíveis trajetórias que o preço futuro pode seguir entre os períodos 0 e *m*. Cada trajetória define um único custo e por isso podemos dizer que o custo é uma função da

trajetória e usar, para caracterizar esse custo, os procedimentos desenvolvidos na seção 3, a partir da simulação de trajetórias de preços segundo um modelo apropriado.

Dentro do modelo descrito a seguir, alguns aspectos de operações reais são abstraídos, sem grande prejuízo, com o objetivo de facilitar a exposição. Os aspectos práticos abstraídos podem ser implementados sem grandes dificuldades em versões mais aprimoradas do modelo.

Serão considerados[3] 5 tipos de custo: (a) taxas operacionais (taxa de registro, taxa operacional básica (TOB) e emolumentos); (b) desembolsos associados ao IRPF; (c) desembolsos associados à CPMF; (d) encargos financeiros referentes à margem de garantia; e, (d) encargos financeiros associados aos ajustes diários. A situação modelada é a de um agente do tipo pessoa física. Para pessoas jurídicas, tributadas com base no lucro real ou no lucro presumido, instituições isentas de certos tributos etc., os custos operacionais observados podem ser diferentes dos apresentados neste trabalho, sendo assunto de pesquisas futuras.

**Taxas operacionais e tributos**

As taxas operacionais incluem 3 componentes: (a) taxa de registro por contrato, ex. R$ 0,20 para contratos de commodities agrícolas negociados em R$ e dólar; (b) TOB (taxa operacional básica), correspondente a 0,3% do valor do contrato, para commodities agrícolas e dólar, por exemplo; (c) emolumentos, calculado como um percentual de 6,32% da TOB (o valor é negociável com a corretora em função do volume). A taxa de liquidação por entrega será desconsiderada, assumindo-se que o encerramento da operação será realizado por reversão da posição. As 3 taxas são cobradas tanto no início quanto no final da operação. A TOB é calculada sobre o preço de ajuste do dia anterior do contrato correspondente ao segundo vencimento. Para simplificar a aplicação dessas taxas, o trabalho assume que a TOB será calculada sobre o preço do contrato no período

[3] Os dados utilizados sobre tributos e taxas operacionais, descritos nesta seção foram obtidos dentro da pesquisa realizada junto a BM&F e agentes do mercado, conduzida dentro da dissertação de mestrado de E. Andrade.

0. Os valores apresentados referem-se a operações normais, pois operações de *day trade* consideram taxas diferentes das apresentadas (veja no site da BM&F).

O imposto de renda (IRPF) nas operações em mercados futuros é regulamentado pela IN da SRF 25/01. As regras para cálculo dos valores devidos são descritas a seguir. O IRPF, na alíquota de 20%, é cobrado dos saldos positivos resultantes da soma algébrica dos ajustes diários, apurados ao final de cada mês do calendário. Se esse saldo for negativo num dado mês, esse valor será transferido para o cálculo do saldo nos meses subseqüentes. O IRPF deve ser pago 15 dias úteis após o final do mês da apuração do tributo. Considera-se, contudo, neste trabalho, para simplificar o modelo, e sem alterações sensíveis nos resultados, que o imposto é pago ao final do mês dentro qual ele é devido, sendo o valor descontado pela taxa de juros correspondente ao custo de oportunidade, o que considera uma antecipação de pagamento por 15 dias.

No caso da CPMF, considera-se o valor da alíquota como sendo 0,38%, sendo cobrada (de acordo com a lei 9311/96) sobre: (a) os pagamentos das taxas operacionais; (b) depósito de margens de garantia em dinheiro; (c) o saldo líquido de ajustes diários de toda a operação, se esse saldo for negativo. Não são consideradas outras tributações por CPMF que poderiam ocorrer em outras movimentações financeiras utilizadas para a gestão da operação, o que pode subestimar os desembolsos para pagamento desse tributo.

**Custos financeiros associados à margem de garantia e aos ajustes diários**

Na BM&F, a margem é definida como um valor fixo por contrato, que pode ser aumentado por chamadas de margem, durante a operação, em condições especificas do mercado. Para o contrato de milho, por exemplo, que corresponde a 450 sacas de 60 kg, o valor da margem era R$ 560,00, em 30 de outubro de 2003, o que representava 5,6 % a 6,5 % do valor dos contratos nessa data. Para operações fora do *hedge*, a margem era R$ 700, o que representava entre 7 e 8 % do valor do contrato. A margem pode ser depositada em certificados de depósito bancário (CDBs) e por outros ativos. Para o

contrato de dólar comercial, essa margem variava, na mesma data, entre R$ 13.731,00 (NOV 03) e R$ 34.898,91 (OUT 94), para um contrato de US$ 50.000,00.

Para formalização dos custos financeiros, assume-se que o agente tem pela frente duas taxas de juros relevantes: (a) uma taxa $J_a$ que remunera suas aplicações, refletindo o custo de oportunidade do seu capital, pressuposta idêntica a taxa média de remuneração de CDBs; e (b) uma taxa $J_c$ para captação de recursos. A idéia geral do modelo apresentado é que o agente recebe juros $J_a$ pelos saldos positivos de uma conta que reflete a operação e paga juros $J_c$ pelos saldos negativos. O recebimento de juros sobre saldos positivos é facilitado por mecanismos como o FIF (Fundo de Investimento Financeiro) que vêm sendo implementados no passado recente.

A situação mais usual é $J_c > J_a$. Para agentes com ampla capacidade de financiamento de suas operações, o custo de oportunidade para captação será considerado igual à taxa para aplicações. Agentes pouco capitalizados, por outro lado, freqüentemente têm que recorrer a mecanismos de financiamento para manutenção de suas operações na bolsa, para pagamento da margem e dos ajustes diários. Para esses agentes a taxa de captação será considerada como sendo $J_c$. O problema desses agentes descapitalizados, muitas vezes produtores rurais, é um problema sério a ponto de existir interesse pelo financiamento para operações em bolsa para commodities agrícolas, considerando taxas de juros menores que as praticadas pelo mercado (ex. Funcafé e Fundo Agropecuário BB-BM&F).

**Definição de contas para o fluxo de caixa e obtenção do custo total da operação - CT**

Para modelar o fluxo de caixa na operação, consideramos 2 contas, representadas por R e A. A primeira é a conta R que contabiliza todos os fluxos monetários reais da operação, sendo atualizada no final de cada período. Nesta conta são creditados e/ou debitados: (a) operações associadas à margem de garantia; (b) taxas operacionais; (c) ajustes diários; (d) tributos; e, (e) encargos financeiros. Quando o saldo é positivo, no dia anterior, essa

conta é creditada dos juros obtidos pela aplicação da taxa $J_a$ sobre o saldo anterior. Caso o saldo seja negativo, no dia anterior, a conta é debitada de juros à taxa $J_c$ sobre esse saldo. Para agentes capitalizados, com capacidade própria de financiamento de suas operações, assume-se $J_c = J_a$.

A segunda é a conta A, que contabiliza somente os ajustes diários. Essa conta possibilitará o cálculo do IRPF e CPMF nos saldos dos ajustes (quando devidos), para débito na conta R nos momentos apropriados. Em operações reais podem existir mais contas. As 2 contas consideradas, contudo, caracterizam de uma forma simplificada a natureza do processo. A existência de mais contas pode implicar em custos adicionais, não considerados neste desenvolvimento. As datas correspondentes ao final dos meses, quando certos tributos são calculados, podem ser definidas especificamente ou assumidas como ocorrendo a cada 22 dias úteis de operação (pressuposição utilizada para obtenção dos resultados na seção 5).

Se representarmos por $S_m^R$ o saldo existente na conta R, ao final do período *m*, na ausência de custos

$$P_0^f = S_m^R + P_m^f , \tag{4.2}$$

ou seja, os ajustes somados ao preço final seriam iguais ao preço no período 0, o preço fixado. Como os custos (CT) existem, a situação mais freqüente é

$$P_0^f = S_m^R + P_m^f + \mathrm{CT} \tag{4.3}$$

ou

$$\mathrm{CT} = (P_0^f - P_m^f) - S_m^R . \tag{4.3.1}$$

O termo entre parêntesis na expressão (4.3.1) representa exatamente o saldo da conta A, observado no período *m*, logo

$$\mathrm{CT} = S_m^A - S_m^R . \tag{4.4}$$

Se os custos considerados fossem nulos, os saldos finais das contas A e R seriam iguais. Em geral, como esses custos existem, a conta R apresentará, em geral, saldo final menor

que o existente na conta A. Uma medida de custo mais fácil de ser entendida, pode ser obtida pela sua definição como um percentual de $P_0^f$, o preço fixado, por

$$\mathrm{CT}_{\%} = \frac{S_m^A - S_m^R}{P_0^f} \times 100. \qquad .(4.5)$$

Na verdade, CT é uma variável aleatória dependente das trajetórias de preços consideradas, sendo uma função dessas trajetórias, podendo ser caracterizada pelo processo de simulação desenvolvido na seção 3. Esse custo pode ser decomposto, do ponto de vista contábil, em seus diferentes componentes: juros nominais recebidos(JR), juros nominais pagos (JP), taxas da bolsa (TB), IRPF, CPMF, ajustes ($\mathrm{A}$), compra do certificado ($\mathrm{CDB}_0$) e venda do certificado ($\mathrm{CDB}_m$).

Para um melhor entendimento do processo de decomposição dos custos em seus vários componentes, utilizado no trabalho, é apresentada, a seguir, a evolução do saldo da conta R, em cada período, pelas equações

$$\begin{aligned}
S_0^R &= -\mathrm{CDB}_0 - \mathrm{TB}_0 \\
S_1^R &= S_0^R + \mathrm{A}_1 + \mathrm{JR}_1 - \mathrm{JP}_1 - \mathrm{IRPF}_1 - \mathrm{CPMF}_1 \\
&\vdots \\
S_{m-1}^R &= S_{m-2}^R + \mathrm{A}_{m-1} + \mathrm{JR}_{m-1} - \mathrm{JP}_{m-1} - \mathrm{IRPF}_{m-1} - \mathrm{CPMF}_{m-1} \\
S_m^R &= S_{m-1}^R + \mathrm{A}_m - \mathrm{TB}_m + \mathrm{JR}_m - \mathrm{JP}_m - \mathrm{IRPF}_m - \mathrm{CPMF}_m + \mathrm{CDB}_m
\end{aligned} \qquad .(4.6)$$

Para simplificar o modelo, assume-se que o primeiro CPMF é pago no período 1 da operação e o último no próprio período *m*. A soma das expressões em (4.6) resulta em

$$S_m^R = -\mathrm{CDB}_0 + \mathrm{CDB}_m - \mathrm{TB}_0 - \mathrm{TB}_m + \sum_{t=1}^{m} (\mathrm{A}_t + \mathrm{JR}_t - \mathrm{JP}_t - \mathrm{IRPF}_t - \mathrm{CPMF}_t). \qquad .(4.7)$$

No caso da conta A, o saldo no período *m* seria definido simplesmente por

$$S_m^A = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{A}_t . \qquad .(4.8)$$

Juntando as expressões (4.4), (4.7) e (4.8), chega-se a definição do custo CT a partir de seus componentes por:

$$CT = CDB_0 - CDB_m + TB_0 + TB_m - \sum_{t=1}^{m} JR_t + \sum_{t=1}^{m} JP_t + \sum_{t=1}^{m} IRPF_t + \sum_{t=1}^{m} CPMF_t \quad .(4.9)$$

Para uma melhor caracterização dos custos associados à aquisição do CDB para cobertura da margem, consideramos, inicialmente, que o ganho direto, em juros recebidos pela operação com o CDB, é definido por

$$JCDB^R = CDB_m - CDB_0 \,. \tag{4.10}$$

Por outro lado, o custo do carregamento desse CDB, representado aqui por $JCDB^C$, dependerá, da situação do agente com relação a disponibilidade de fundos. Se for um agente com ampla disponibilidade de recursos, o custo será definido pela taxa $J_a$, o custo de oportunidade do capital do agente para aplicações, pelo período *m*. Como assumimos que $J_a$ é a própria taxa de juros associada à aplicações em CDBs, ocorrerá nesse caso que

$$JCDB^R = JCDB^C \tag{4.11}$$

o que implica a inexistência de custos para manutenção da margem nesse caso. Alternativamente, uma outra situação extrema seria a de um agente com total falta de capital, tendo que captar no mercado esses recursos à taxa $J_c$. Nesse caso, $J_c > J_a$, de onde decorre que

$$JCDB^R < JCDB^C. \tag{4.12}$$

A diferença $JCDB^C - JCDB^R$ corresponde ao custo líquido de carregamento desse CDB. Se $J_a^d$ e $J_c^d$ representam taxas diárias, esse custo seria definido por

$$JCDB^C - JCDB^R = CDB_0 (1 + J_c^d)^m - CDB_0 (1 + J_a^d)^m. \tag{4.13}$$

Para facilitar a decomposição dos custos de forma a isolar o componente relacionado à margem de garantia, fazemos a substituição de (4.10) em (4.9), e somamos e subtraímos $JCDB^C$ na expressão resultante, levando a

$$CT = JCDB^{C} - JCDB^{C} - JCDB^{R} + TB_0 + TB_m - \sum_{t=1}^{m} JR_t + \sum_{t=1}^{m} JP_t + \sum_{t=1}^{m} IRPF_t + \sum_{t=1}^{m} CPMF_t \tag{4.14}$$

Se definirmos, para simplificar última expressão,

$$CMARGEM = JCDB^{C} - JCDB^{R}, \tag{4.15}$$

como o custo da margem, associada ao custo de carregamento do CDB,

$$TB = TB_0 + TB_1 \tag{4.16}$$

como o total de taxas operacionais,

$$TJ = -JCDB^{C} - \sum_{t=1}^{m} JR_t + \sum_{t=1}^{m} JP_t \tag{4.17}$$

como o total de juros pagos, deduzidos os juros pagos para manutenção da margem,

$$TIRPF = \sum_{t=1}^{m} IRPF_t \tag{4.18}$$

como o total pago de imposto de renda (IRPF), e

$$TCPMF = \sum_{t=1}^{m} CPMF_t \tag{4.19}$$

como o total de CPMF pago na operação. A partir dessas últimas expressões, o custo total (CT), apresentado em (4.14) seria redefinido por

$$CT = CMARGEM + TB + TJ + TIRPF + TCPMF. \tag{4.20}$$

Nessa expressão, o custo total CT foi decomposto em cinco componentes, que também podem ser expressos na forma percentual, com relação a $P_0^f$, tomando por base o procedimento utilizado na expressão (4.5).

**Definição dos algoritmos para obtenção dos componentes de CT**

A especificação formal dos procedimentos utilizados para definição de cada componente em (4.20), será apresentada a seguir, na forma de algoritmos. As informações requeridas para a obtenção desses componentes, para cada trajetória de preços, incluem: (a)

definição da trajetória de preços $P_0^f, P_1^f, \cdots, P_m^f$ (a partir de procedimento descritos na Seção 3), considerando que os preços são os valores de 1 contrato; (b) taxa operacional básica, taxa de registro e emolumentos, representados nos algoritmos pelas variáveis **taxatob, valreg** e **taxaemol**; (c) taxas de juros diárias $J_a^d$ e $J_c^d$; (d) valores da margem de garantia, representado por **valormargem** (e) alíquotas do IRPF e da CPMF, representadas nos algoritmos por **taxairpf e taxacpmf**. Deve especificar, também, o tipo de agente com relação a disponibilidade de fundos, na variável **tipoagente**. Para agentes que dispõe de recursos amplos para financiamento próprio das operações, considera-se **tipoagente=1**, para agentes que precisam captar recursos para operação, considera-se que **tipoagente=2**.

Inicialmente, o algoritmo 4A (Figura 4.1), define os saldos diários na conta A. A partir dessas definição, o algoritmo 4B (Figura 4.2), especifica o cálculo dos valores devidos de IRPF a cada fim de mês, associados à operação no mercado futuro. No mundo real o IRPF deve pago 15 dias úteis após o final do mês. No modelo considerado, o pagamento é considerado no próprio final do mês com um desconto considerado.

A seguir, o algoritmo 4C (Figura 4.3), apresenta a definição dos saldos diários da conta R, assim como dos componentes dos custos da operação, especificados em (4.20). Finalmente, o algoritmo 4D (Figura 4.4) apresenta uma descrição simplificada do processo completo de simulação para um contrato de venda. Para um contrato de compra basta alterar o cálculo do ajuste (como indicado na figura). O algoritmo considera os procedimentos descritos na Seção 3 para obtenção de trajetórias de preços a partir de modelos alternativos. Como resultado, apresenta uma amostra tamanho *n* do vetor que caracteriza os componentes do custo da operação, condicionados pelas trajetórias de preços simuladas. Os algoritmos apresentados indicam uma possível seqüência de procedimentos para implementação das idéias apresentadas nesta seção e na seção anterior. Foram desenvolvidos com o interesse de clarificar os procedimentos, e não com o intuito de buscar a máxima eficiência computacional, o que poderia dificultar seu entendimento.

**Algoritmo 4A – Definição dos Saldos da Conta A**

*inicio*

*especifique:* $m$ *(número de dias da operação)*

$P_0^f, P_1^f, \cdots, P_m^f$ *(trajetória de preços)*

$S_0^A \leftarrow 0$

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, m$, *faça* {

$S_i^A \leftarrow S_{i-1}^A + (P_i^f - P_{i-1}^f)$ *(inverta preços se for contrato de compra)*

}

*informe* $S_0^A, S_1^A, \cdots, S_m^A$

*fim*

Figura 4.1 Algoritmo utilizado para definição dos saldos da conta A

**Algoritmo 4B – Cálculo do Imposto de Renda**

*início*

*especifique:* $k$ *(núm. de fins de mês na operação)*

$d_1, d_2, \cdots, d_k$ *(núm.dos dias de fim de mês)*

$taxairpf$ *(alíquota do imposto)*

$S_0^A, S_1^A, \cdots, S_m^A$ *(saldo da conta A nos dias de operação)*

$J$ *(taxa de juro para cálculo do desconto por pagamento antecipado)*

$d_0 \leftarrow 0$

$A \leftarrow 0$

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, k$ *, faça* {

$\mathrm{SM_i} \leftarrow S_{d_i}^A - S_{d_{i-1}}^A$ *(definição dos saldos mensais))*

}

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, k$ *, faça* {

$A \leftarrow A + \mathrm{SM_i}$

$\mathrm{irpf}_i \leftarrow 0$

*se* $A > 0$ {

$\mathrm{irpf}_i \leftarrow (A \times taxairpf)/(1+J)^{15}$

$A \leftarrow 0$

}

}

*informe* $\mathrm{imposto}_i, i = 1, \cdots, k$ *(total e valores mensais de irpf)*

*fim*

obs.: procedimento desenvolvido segundo IN da SRF 25/01

Figura 4.2 Algoritmo utilizado para cômputo do imposto de renda (IRPF) a pagar

**Algoritmo 4C– Definição dos saldos da conta R e de CT**

*início*

*especifique:* $m$, $P_0^f, P_1^f, \cdots, P_m^f$ *(dias de oper. e trajetória de preços)*

$d_1, d_2, \cdots, d_k$ *(núm. dos dias de fim de mês)*

$\text{irpf}_j$, $j = 1, \cdots, k$ *(valores mensais de irpf)*

tipoagente *(tipo do agente quanto a liquidez, 1 ou 2)*

$J_c^d$, $J_a^d$ *(juros para captação e aplicação)*

*valormargem (valor da margem para o contrato)*

*taxatob, valreg, taxaemol (tob, registro, emolumentos)*

*taxacpmf*, $S_m^A$ *(alíquota da cpmf, saldo conta A em m)*

$\text{TB}_0 \leftarrow P_0^f \times taxatob \times (1 + taxaemol) + taxareg$ *(taxas bolsa)*

$\text{CDB}_0 \leftarrow valormargem$

$S_0^R \leftarrow -\text{TB}_0 - \text{CDB}_0$

$\text{CPMF}_1 \leftarrow TB_0 \times taxacpmf$

$\text{JP}, \text{JR}, \text{TIRPF}, \text{j} \leftarrow 0$

*se* tipoagente=*2 faça* { $J \leftarrow J_c^d$ } caso contrário faça { $J \leftarrow J_a^d$ }

*para* $i \leftarrow 1, \cdots, m$, *faça* {

se $S_{i-1}^R > 0$ *faça* { $juros \leftarrow S_{i-1}^R \times J_a^d$ ; $\text{JR} \leftarrow \text{JR} + juros$ }

*caso contrário faça* { $juros \leftarrow S_{i-1}^R \times J$ ; $\text{JP} \leftarrow \text{JP} - juros$ }

$S_i^R \leftarrow S_{i-1}^R + (P_{i-1}^f - P_i^f) + juros$ *(inverta preços em contr. compra)*

*se* $i \in \{d_1, d_2, \cdots, d_k\}$ *faça* { $j \leftarrow j + 1$

$S_i^R \leftarrow S_i^R - \text{irpf}_j$

$\text{TIRPF} \leftarrow \text{TIRPF} + \text{irpf}_j$

}

}

$\text{TB}_m \leftarrow P_m^f \times taxatob \times (1 + taxaemol) + taxareg$ *(taxas bolsa)*

$\text{CDB}_m \leftarrow \text{valormargem} \times (1 + J_a^d)^m$

$\text{CPMF}_m \leftarrow \text{TB}_m \times taxacpmf$

*se* $S_m^A < 0$ *faça* { $\text{CPMF}_m \leftarrow \text{CPMF}_m + taxacpmf \times (-S_m^A)$ }

$S_m^R \leftarrow S_m^R - \text{TB}_m + \text{CDB}_m - \text{CPMF}_m$

$\text{TB} \leftarrow \text{TB}_0 + \text{TB}_m$

$\text{CMARGEM} \leftarrow \text{valormargem} \times ((1 + J)^m - (1 + J_a^d)^m)$ *(custo da margem)*

$\text{TCPMF} \leftarrow \text{CPMF}_0 + \text{CPMF}_m$

$\text{TJ} \leftarrow \text{JP} - \text{JR} - (\text{valormargem} \times (1 + J)^m - \text{valormargem})$

$\text{CT} \leftarrow \text{CMARGEM} + \text{TB} + \text{TJ} + \text{TIRPF} + \text{TCPMF}$

*informe* CT, CMARGEM, TB, TJ, TIRPF, TCPMF

*fim*

Figura 4.3 Algoritmo utilizado para cômputo do saldo na conta R

**Algoritmo 4D – Processo Completo (Simplificado)**

*inicio*

*especifique:* $n$ *(núm. de simulações)*
$m$, *(dias de oper. e trajetória de preços)*
$d_1, d_2, \cdots, d_k$ *(núm. dos dias de fim de mês)*
tipoagente *(tipo do agente quanto a liquidez, 1 ou 2)*
$J_c^d$, $J_a^d$ *(juros para captação e aplicação)*
*tipoagente (tipo do agente quanto a liquidez, 1 ou 2)*
*valormargem (valor da margem para o contrato)*
*taxatob, valreg, taxaemol (tob, registro, emolumentos)*
*taxacpmf (alíquota da cpmf, saldo conta A em m)*
$M$ *(modelo do processo de simulação de preços)*
$P_0^f, \vec{\theta}$ *(preço em 0 e parâmetros para o modelo M)*

*para* $s \leftarrow 1, \cdots, n$ *, faça* {

$P_0^f, P_1^f, \cdots, P_m^f \leftarrow$ *simule a trajetória de preços s com M,* $P_0^f, \vec{\theta}$

$S_0^A, S_1^A, \cdots, S_m^A \leftarrow$ *obtenha saldos da conta A com Algoritmo 4A*

$\text{irpf}_1 \cdots \text{irpf}_k \leftarrow$ *obtenha o irpf no final dos meses pelo Algoritmo 4B*

$\text{CMARGEM}^s, \text{TB}^s, \text{TJ}^s, \text{TIRPF}^s, \text{TCPMF}^s \leftarrow$ *obtenha os componentes do custo para a trajetória s pelo algoritmo 4C*

$$\text{CMARGEM}_{\%}^s, \text{TB}_{\%}^s, \text{TJ}_{\%}^s, \text{TIRPF}_{\%}^s, \text{TCPMF}_{\%}^s \leftarrow$$
$$\text{CMARGEM}^s, \text{TB}^s, \text{TJ}^s, \text{TIRPF}^s, \text{TCPMF}^s \times \frac{1}{P_0^f} \times 100$$

*(custos definidos na forma percentual)*

$$\text{CT}_{\%}^s \leftarrow \text{CMARGEM}_{\%}^s + \text{TB}_{\%}^s + \text{TJ}_{\%}^s + \text{TIRPF}_{\%}^s + \text{TCPMF}_{\%}^s$$

$$\nabla P_{\%}^s \leftarrow \frac{P_m^f - P_0^f}{P_0^f} \times 100$$ *(variação percentual do preço entre 0 e m)*

}

obtenha, para as variáveis de interesse, média, intervalo de confiança e matriz de correlação (amostral) a partir de

$$\text{CT}_{\%}^s \text{CMARGEM}_{\%}^s, \text{TB}_{\%}^s, \text{TJ}_{\%}^s, \text{TIRPF}_{\%}^s, \text{TCPMF}_{\%}^s, \nabla P_{\%}^s, \quad s = 1, \cdots, n$$

*fim*

Figura 4.4 Algoritmo utilizado para cômputo dos custos operacionais e seus componentes

## 5. Estimativa de custos operacionais em mercados futuros

Esta seção ilustra a aplicação dos procedimentos desenvolvidos nas seções anteriores. Um estudo de caso e argumentos teóricos são utilizados para o entendimento da magnitude e natureza de certos custos operacionais em mercados futuros.

O estudo de caso considera contratos do mercado futuro de milho, transacionados na BM&F. Inicialmente, os custos são calculados à partir da própria evolução dos preços observada no mercado e dos conceitos e algoritmos definidos na seção anterior. Num segundo momento, são estimados modelos que tentam caracterizar, do ponto de vista estatístico, as trajetórias que esses preços podem assumir. A partir dessa caracterização, realizada com grau crescente de complexidade, são obtidas estimativas dos componentes dos custos, com o uso da técnica de simulação, detalhada na Seção 3.

Para efeito do exercício realizado, considera-se que a taxa de juros por dia de operação para aplicações (a mesma considerada para o CDB), representada por $J_a^d$, é 0,00055 (aproximadamente 1,2% ao mês, considerando 22 dias de operação por mês). Assume-se que a taxa de juros diária de captação, representada por $J_c^d$, é 0,0017 (aproximadamente 3,75% ao mês). Consideram-se 2 tipos extremos de investidor, o primeiro, tipo 1, denominado agente capitalizado, tem plena capacidade de financiar a operação com recursos próprios, considerando um custo de oportunidade igual a $J_a^d$. Por outro lado, o agente tipo 2, denominado agente descapitalizado, necessita de capital externo para custear as operações, ao custo de $J_c^d$, e aplica os saldos positivos à taxa $J_a^d$. Considera-se também uma restrição de oscilação máxima diária dos preços (usada pela BM&F), definida de forma que o valor absoluto da taxa de variação não pode exceder 5%.

**Contratos de Milho – BM&F – Custos de trajetórias observadas**

São considerados na análise os contratos futuros de milho com vencimento em MAI02, JAN03, MAR03 e MAI03, por serem os mais próximos do período de colheita do produto. Desses contratos, foram aproveitados os últimos 121 preços de ajuste observados, desprezando-se as informações dos primeiros meses do contrato, que

usualmente estão associadas a um baixo volume de negociação. Contratos de milho anteriores a MAI02 também foram desprezados por 2 razões principais: (a) representavam um outro modelo de contrato; ou (b) o volume negociado atingia níveis pouco expressivos. Por outro lado, contratos com vencimento posterior a MAI03 foram desconsiderados porque ainda estavam distantes do vencimento na data da pesquisa. A Figura 5.1 mostra a evolução da trajetória dos preços observada durante o período de análise considerado para cada um desses contratos.

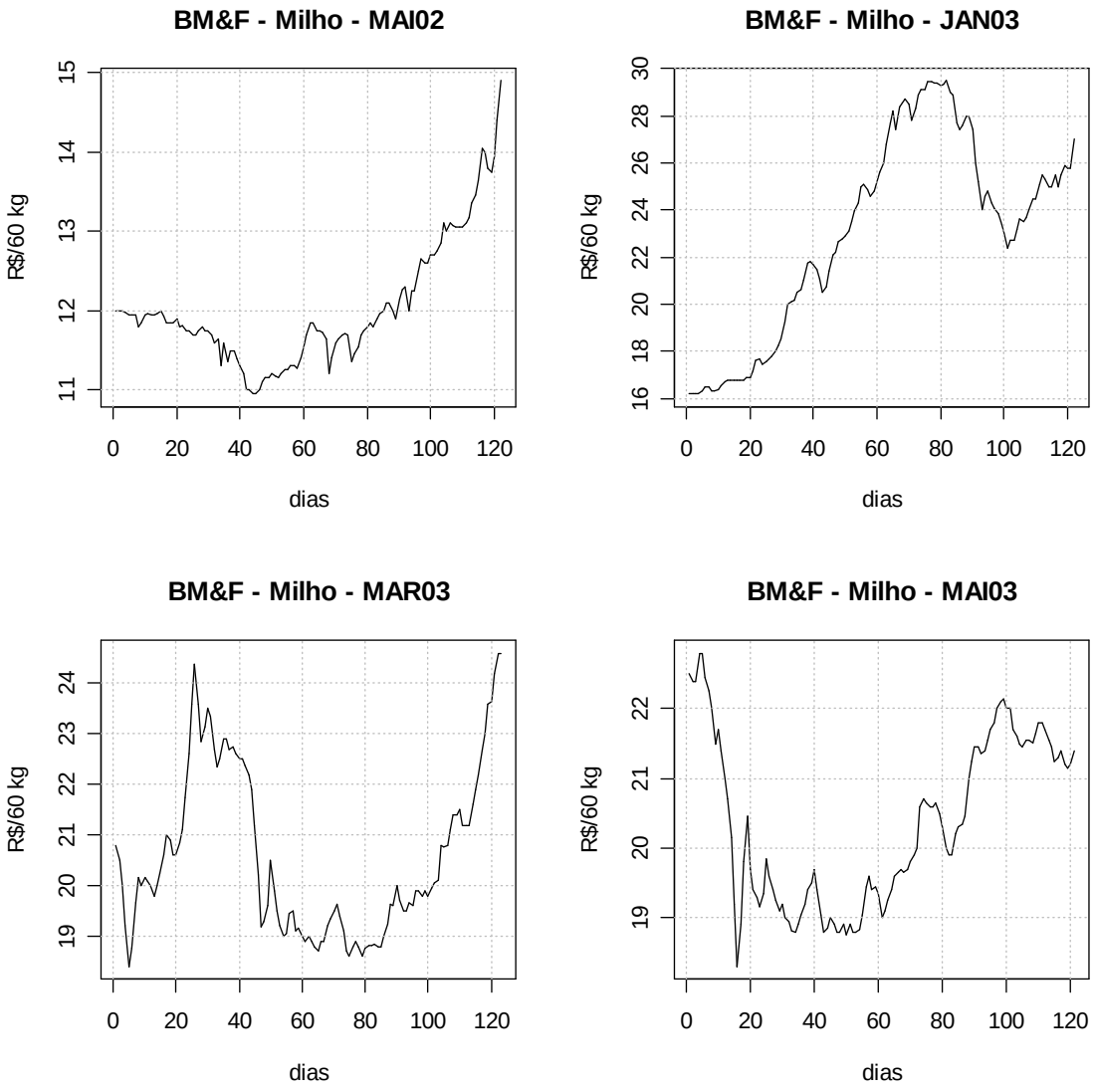


Figura 5.1 Evolução dos preços em contratos futuros de milho selecionados nos últimos 121 dias do contrato (veja texto).

Os custos foram definidos de forma percentual (com relação ao valor do contrato no período 0) e decompostos por categoria, para cada um desses vencimentos, considerando-se um período de 120 dias. Esses custos, para investidores do tipo 1 e 2 (capitalizados e descapitalizados) são apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2, respectivamente.

| Componente | Custos como percentagem do valor inicial do contrato (120 dias) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | MAI02 | JAN03 | MAR03 | MAI03 |
| Custo de Margem | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Taxas da Bolsa | 0,71% | 0,83% | 0,69% | 0,63% |
| Juros líquidos | 0,09% | 3,12% | -0,03% | -0,51% |
| IRPF | 1,75% | 0,00% | 1,82% | 3,11% |
| CPMF | 0,08% | 0,23% | 0,06% | 0,002% |
| Custo Total | 2,63% | 4,18% | 2,55% | 3,23% |

Tabela 5.1 Custos operacionais estimados em trajetórias de preços observadas no contrato de milho (BM&F) para agentes tipo 1 (capitalizado).

| Componente | Custos como percentagem do valor inicial do contrato (120 dias) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | MAI02 | JAN03 | MAR03 | MAI03 |
| Custo de Margem | 1,72% | 1,27% | 0,99% | 0,92% |
| Taxas da Bolsa | 0,71% | 0,83% | 0,69% | 0,63% |
| Juros líquidos | 0,25% | 9,86% | -0,05% | -1,17% |
| IRPF | 1,75% | 0,00% | 1,82% | 3,11% |
| CPMF | 0,08% | 0,23% | 0,06% | 0,002% |
| Custo Total | 4,51% | 12,20% | 3,52% | 3,49% |

Tabela 5.2 Custos operacionais estimados em trajetórias de preços observadas no contrato de milho (BM&F) para agentes tipo 2 (descapitalizado).

As Tabelas 5.3 e 5.4 apresentam os mesmos custos para uma operação de 60 dias, contados do final do contrato. Essa situação é apresentada para evidenciar a dependência de cada componente do custo no prazo da operação, com base nos dados empíricos de trajetórias. Os itens dependentes de taxas de juros são claramente mais afetados que outros. De um modo geral os custos percentuais são menores que os observados na operação de 120 dias. Conclusões mais definitivas, porém, dependerão de outras análises que serão apresentadas posteriormente.

| Componente | Custos como percentagem do valor inicial do contrato (60 dias) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | MAI02 | JAN03 | MAR03 | MAI03 |
| Custo de Margem | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Taxas da Bolsa | 0,72% | 0,64% | 0,74% | 0,67% |
| Juros líquidos | 0,22% | 0,14% | 0,23% | 0,29% |
| IRPF | 0,00% | 1,56% | 0,21% | 0,00% |
| CPMF | 0,09% | 0,01% | 0,11% | 0,04% |
| Custo Total | 1,03% | 2,35% | 1,28% | 1,00% |

Tabela 5.3 Custos operacionais estimados em trajetórias de preços observadas no contrato de milho (BM&F) para agentes tipo 1 (capitalizado).

| Componente | Custos como percentagem do valor inicial do contrato (60 dias) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | MAI02 | JAN03 | MAR03 | MAI03 |
| Custo de Margem | 0,82% | 0,38% | 0,51% | 0,50% |
| Taxas da Bolsa | 0,72% | 0,64% | 0,74% | 0,67% |
| Juros líquidos | 0,68% | 0,47% | 0,67% | 0,90% |
| IRPF | 0,00% | 1,56% | 0,21% | 0,00% |
| CPMF | 0,09% | 0,01% | 0,11% | 0,04% |
| Custo Total | 2,31% | 3,06% | 2,23% | 2,10% |

Tabela 5.4 Custos operacionais estimados em trajetórias de preços observadas no contrato de milho (BM&F) para agentes tipo 2 (descapitalizado).

**Contratos de Milho (BM&F) – Caracterização estatística das trajetórias**

Nesta parte do trabalho as séries de preços são caracterizadas por modelos estatísticos. Esses modelos podem oferecer uma representação relativamente simples, mas razoavelmente adequada, do comportamento estocástico dos preços. A análise desenvolvida possibilita conclusões mais gerais sobre a natureza dos custos em operações em mercados futuros, que aquelas estabelecidas por uma única trajetória. Essa trajetória observada seria uma das infinitas trajetórias consideradas a partir modelo estimado.

O objetivo central dessa análise é a caracterização de um modelo ARIMA(c,i,d)-GARCH(p,q) que possa representar satisfatoriamente a evolução das taxa diária de crescimento dos preços $r_t$, obtida por (2.2) e (2.3). Na Figura 5.2 são apresentados gráficos que mostram as evoluções dessas taxas, para os contratos de milho descritos anteriormente.

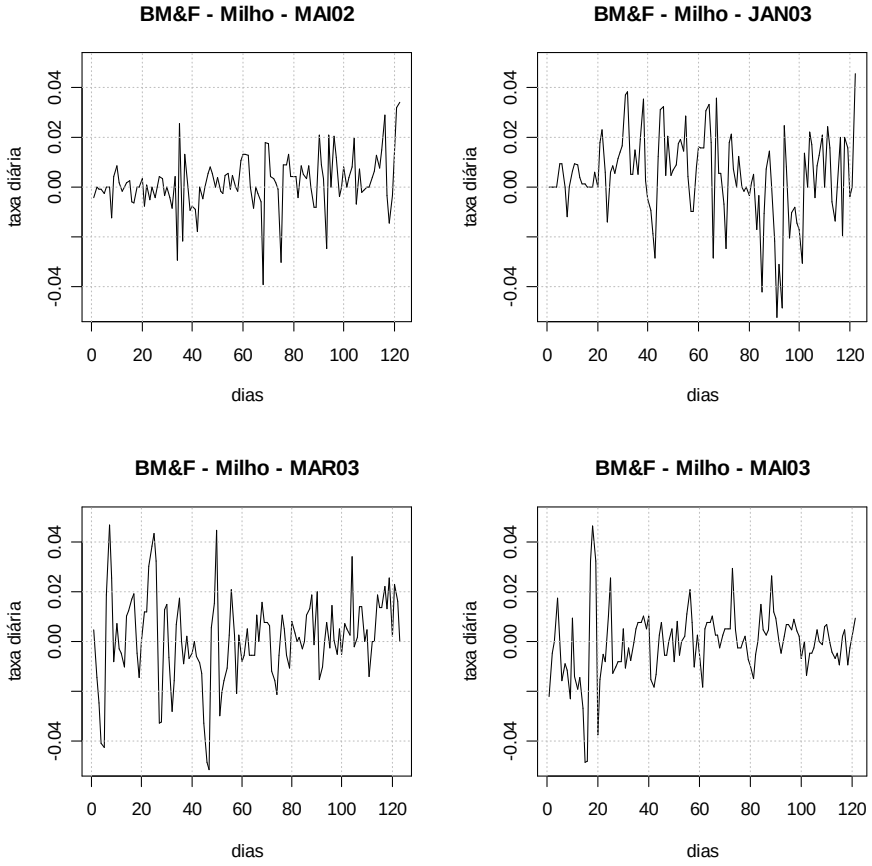


Figura 5.2 Evolução das taxas de variação dos preços nos contratos futuros de milho selecionados nos últimos 120 dias do contrato (veja texto).

Os gráficos apresentados foram construídos com a mesma escala, de forma a facilitar a comparação da evolução das taxas nos quatro contratos. Para facilitar o diagnóstico de problemas de autocorrelação (AR) e dependências em médias móveis (MA), são apresentadas, nas Figuras 5.3 e 5.4, respectivamente, as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial das taxas em cada uma das séries. Nas figuras, barras que excedem as linhas tracejadas indicam rejeição da hipótese da nulidade para a autocorrelação ao nível de 5%. Para as séries JAN03, MAR03 e MAI03, indícios de possíveis efeitos associados a AR e/ou MA parecem mais evidentes (veja Mills, 1997 e Hamilton, 1994, para detalhes sobre o diagnóstico). Adicionalmente, a Figura 5.2 indica que as séries apresentam períodos (clusters) com maior ou menor volatilidade, e sugere que os modelos GARCH podem ser apropriados para modelar o comportamento da variância condicional das taxas. Esses indícios são reforçados pela função que apresenta a autocorrelação das taxas elevadas ao quadrado, na Figura 5.5 (Andersen et al., 2002 e Laurent e Peters, 2002).

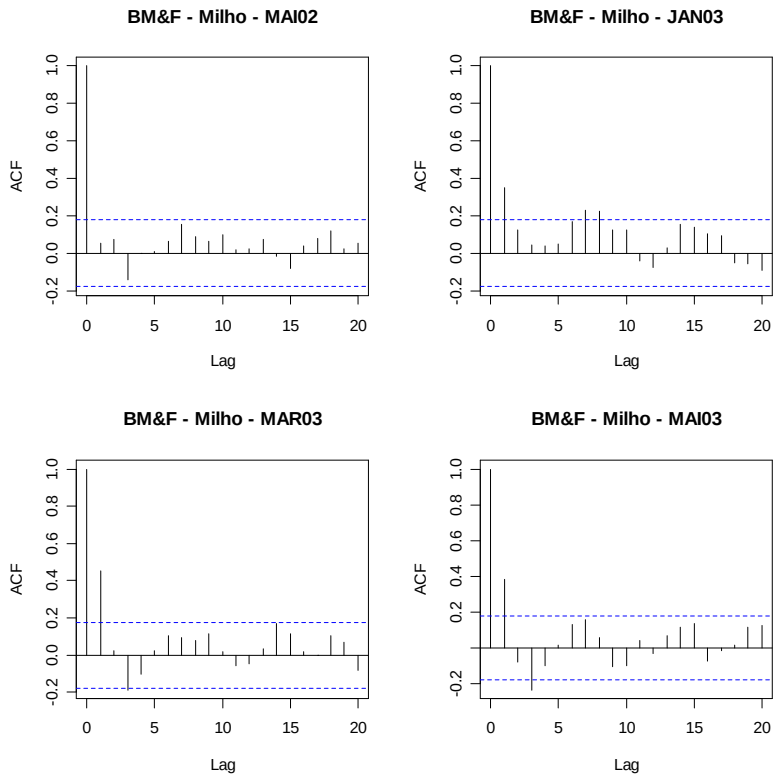


Figura 5.3 Funções de autocorrelação das taxas diárias, obtidas das séries de preços de milho selecionados nos últimos 121 dias do contrato (veja texto).

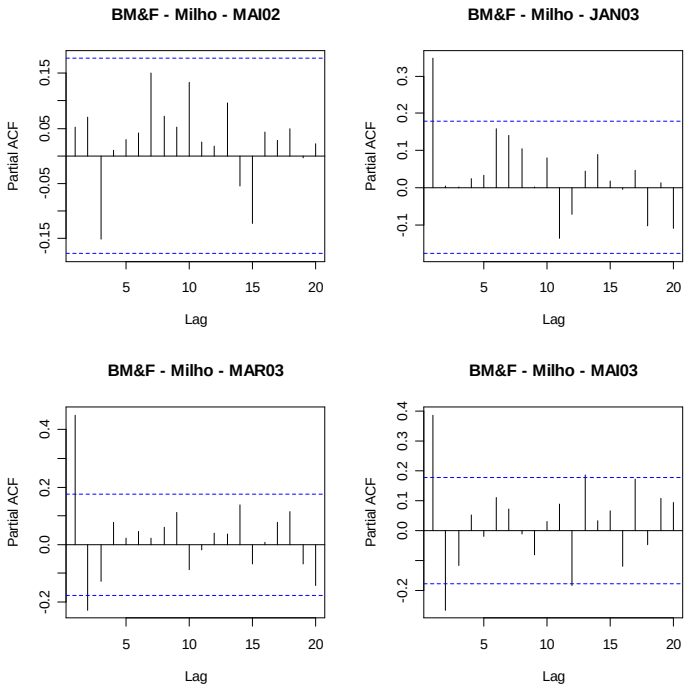


Figura 5.4 Funções de autocorrelação parcial das taxas diárias, obtidas das séries de preços de milho selecionados nos últimos 121 dias do contrato (veja texto).

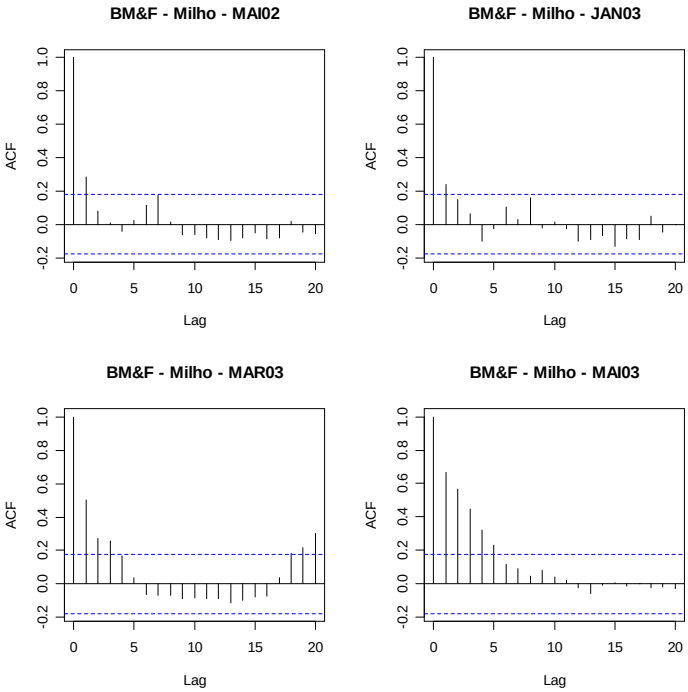


Figura 5.5 Funções de autocorrelação das taxas diárias ao quadrado, obtidas das séries de preços de milho selecionados nos últimos 121 dias do contrato (veja texto).

Foram testados, para cada série, modelos ARIMA(c,i,d) que consideraram todas as combinações possíveis considerando c variando de 0 a 3, i variando de 0 a 1 e d variando de 0 a 3. Os modelos testados foram classificados através do critério BIC (Bayes Information Criterium), desenvolvido por Schwarz (1978). Esse critério tende a ser considerado mais adequado do ponto de vista teórico – privilegiando modelos com menos parâmetros, por exemplo – que outros critérios populares também fundamentados no valor da função de verossimilhança como o AIC (Akaike Information Criterium), argumenta Mills (1997). A Tabela 5.5 apresenta os 3 melhores modelos sob esse critério (quanto menor o valor do BIC, melhor é o modelo).

| Série de taxas | Modelos Melhores | Critério BIC |
|---|---|---|
| MAI02 | ARIMA(0,0,0) | -747,09 |
| | ARIMA(1,0,0) | -742,66 |
| | ARIMA(0,0,1) | -742,60 |
| JAN03 | ARIMA(1,0,0) | -648,27 |
| | ARIMA(0,0,1) | -646,44 |
| | ARIMA(1,0,1) | -643,22 |
| MAR03 | ARIMA(2,0,0) | -660,58 |
| | ARIMA(0,0,2) | -660,08 |
| | ARIMA(0,0,1) | -659,98 |
| MAI03 | ARIMA(2,0,0) | -710,30 |
| | ARIMA(0,0,1) | -710,18 |
| | ARIMA(3,0,0) | -707,10 |

Tabela 5.5 Melhores modelos ARIMA para representação de cada série, segundo o critério BIC (Schwarz, 1978) - veja texto.

Os resíduos do melhor modelo ARIMA obtido em cada série foram utilizados para a seleção de um modelo GARCH(*p*,*q*). Os modelos testados consideraram todas as possibilidades com *p* variando de 0 a 2 e *q* variando de 0 a 2. Os modelos testados foram classificados através do critério BIC e estão apresentados em ordem de superioridade por esse critério na Tabela 5.6.

| Série de taxas | Modelos Melhores | Critério BIC |
|---|---|---|
| MAI02 | GARCH(0,1) | -751,63 |
| | GARCH(1,1) | -747,47 |
| | GARCH(0,0) | -747,10 |
| JAN03 | GARCH(1,1) | -654,61 |
| | GARCH(0,1) | -653,43 |
| | GARCH(0,0) | -653,22 |
| MAR03 | GARCH(0,1) | -750,94 |
| | GARCH(1,1) | -744,92 |
| | GARCH(0,2) | -738,11 |
| MAI03 | GARCH(0,1) | -678,00 |
| | GARCH(1,1) | -677,00 |
| | GARCH(0,2) | -671,84 |

Tabela 5.6 Melhores modelos GARCH para representação de cada série, segundo o critério BIC (Schwarz, 1978) - veja texto.

Os modelos ARIMA e GARCH mais promissores, escolhidos a partir da análise preliminar realizada nos últimos parágrafos, foram testados em conjunto, também pelo critério BIC. Dessa análise foram definidos, na Tabela 5.7, modelos adequados para representar as séries de preços consideradas. Nessa Tabela são especificados os parâmetros estimados pelo método da máxima verossimilhança, com o apoio do Software R, versão 1.7.1 e do software Ox-G@rch 3.0. Nos modelos especificados para MAI02 e MAI03, a distribuição t-Student, respectivamente com 10 e 6 graus de liberdade, corrigida para apresentar uma variância unitária, foi utilizada em lugar da normal padronizada, para caracterizar a distribuição de z em (2.11). Essa pressuposição foi suportada pelo critério BIC, em comparação a outras pressuposições (ex. normalidade). Nos outros casos, a distribuição normal padronizada foi utilizada. A especificação dos parâmetros nos modelos ARIMA e GARCH segue a notação utilizada em (2.7), (2.8) e (2.11). As Figuras A1 a A4, no Apêndice, ilustram algumas trajetórias de taxas amostradas desses modelos, obtidas a partir do algoritmo 3D, apresentado na seção 3. A simulação das trajetórias utilizou os parâmetros estimados como sendo os verdadeiros valores dos parâmetros, uma prática comum em estudos desse tipo – veja por exemplo Laurent e Peters (2002). Um procedimento mais elaborado e tecnicamente mais correto, porém menos utilizado, poderia considerar toda a informação contida na distribuição *a posteriori* dos parâmetros (Lence, 1995). Para cada trajetória, seriam simulados os valores dos parâmetros dessa distribuição. Esse procedimento, contudo, não é utilizado neste estudo.

| Série de taxas | Estimativas dos Parâmetros | Modelo |
|---|---|---|
| MAI02 | $\hat{a}_0 = 0{,}00008124$<br>$\hat{b}_1 = 0{,}3839$ | ARIMA(0,0,0)<br>GARCH(0,1) |
| JAN03 | $\hat{\theta}_1 = 0{,}4614$<br>$\hat{a}_0 = 0{,}00003164$<br>$\hat{a}_1 = 0{,}5510$<br>$\hat{b}_1 = 0{,}3415$ | ARIMA(1,0,0)<br>GARCH(1,1) |
| MAR03 | $\hat{\theta}_1 = 0{,}4514$<br>$\hat{\theta}_2 = -0{,}1401$<br>$\hat{a}_0 = 0{,}00007539$<br>$\hat{a}_1 = 0{,}4234$<br>$\hat{b}_1 = 0{,}2785$ | ARIMA(2,0,0)<br>GARCH(1,1) |
| MAI03 | $\hat{\theta}_1 = 0{,}3688$<br>$\hat{\theta}_2 = -0{,}05567$<br>$\hat{a}_0 = 0{,}00004488$<br>$\hat{a}_1 = 0{,}2508$<br>$\hat{b}_1 = 0{,}5513$ | ARIMA(2,0,0)<br>GARCH(1,1) |

Tabela 5.7 Modelos selecionados para representação de cada série.

**Contratos de Milho (BM&F) – Estimativa dos Custos pela Simulação**

As Tabelas 5.8 e 5.9 apresentam as médias dos componentes dos custos, respectivamente, para o agente tipo 1 (capitalizado) e tipo 2 (descapitalizado). Essas médias foram obtidas a partir de 10.000 trajetórias de preços simuladas através dos procedimentos descritos nas seções anteriores. Os resultados tendem a apresentar um quadro com menos extremos, em função de que os custos representam a média das trajetórias possíveis obtidas dos modelos estimados. Nas trajetórias efetivamente observadas, analisadas anteriormente, os preços, em geral, apresentaram tendência de crescimento, o que aumenta a necessidade de desembolsos para os ajustes e reduz a magnitude do imposto de renda devido (em função dos saldos negativos na conta A). Na simulação esse problema é minimizado pela consideração de uma amostra de trajetórias mais ampla, a partir de um modelo estatístico selecionado para representar a natureza fundamental das trajetórias. Para simplificar o modelo, assume-se nesses experimentos que a taxa de desconto para pagamento antecipado em 15 dias do IRPF é zero.[4]

A incerteza existente com relação à trajetória de preços acaba influenciando a própria distribuição de custos. Na Figura 5.6 são apresentadas estimativas da distribuição de probabilidade do custo, para os modelos correspondentes a MAI02 e JAN03, para o agente tipo 1 (capitalizado). A Figura 5.7 apresenta estimativas da distribuição de probabilidade dos custos para os mesmos vencimentos para agentes tipo 2 (descapitalizados). O objetivo dessas figuras é o de ilustrar a natureza da incerteza existente.

As Tabelas 5.10 e 5.11 contém as matrizes de correlação simples obtidas a partir das 10.000 trajetórias simuladas. Essas matrizes descrevem a associação estatística entre os diferentes componentes do custo, para as trajetórias simuladas pelos modelos correspondentes a MAI02 e JAN03, para o agente tipo 2 (capitalizado).

[4] O impacto dessa pressuposição é mínimo, conforme indicaram experimentos preliminares: aumento, em menos de 1% em termos relativos, da magnitude do custo total médio em operações de 120 dias, quando comparado a situações em que o desconto é considerado.

Para verificar a sensibilidade dos resultados ao refinamento do modelo, é realizado um novo experimento, que considera um modelo extremamente simples para caracterização de cada série, correspondente ao caso ARIMA(0,0,0)-GARCH(0,0), que se reduz ao modelo descrito em (2.2) a (2.4). A volatilidade diária foi estimada, nesse caso, pelo simples desvio padrão das taxas observadas no período. Essas estimativas obtidas, para o agente tipo 2 são apresentadas na Tabela 5.12. Os custos obtidos pelo modelo simplificado (Tabela 5.13) são menores que os obtidos a partir da utilização do modelo mais elaborado, o que sugere que modelos mais aderentes à realidade do comportamento observado dos preços, podem contribuir para estimativas mais apropriadas (e eventualmente maiores) dos custos operacionais. Deve-se ressaltar, entretanto, que apesar das limitações, esse modelo simplificado pode proporcionar aproximações suficientemente boas para certas aplicações.

| Componente | Custos como percentagem do valor inicial do contrato (120 dias) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | MAI02 | JAN03 | MAR03 | MAI03 |
| Custo de Margem | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Taxas da Bolsa | 0,64% | 0,63% | 0,65% | 0,64% |
| Juros líquidos | 0,07% | 0,13% | 0,20% | 0,03% |
| IRPF | 1,41% | 3,67% | 2,63% | 2,35% |
| CPMF | 0,02% | 0,04% | 0,04% | 0,03% |
| Custo Total | 2,14% | 4,47% | 3,52% | 3,05% |

Tabela 5.8 Custos operacionais médios estimados em 10.000 trajetórias de preços simuladas a partir de modelos estimados para agentes tipo 1 (capitalizados).

| Componente | Custos como percentagem do valor inicial do contrato (120 dias) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | MAI02 | JAN03 | MAR03 | MAI03 |
| Custo de Margem | 1,72% | 1,27% | 0,99% | 0,92% |
| Taxas da Bolsa | 0,64% | 0,63% | 0,64% | 0,64% |
| Juros líquidos | 0,19% | 0,68% | 0,79% | 0,47% |
| IRPF | 1,47% | 3,86% | 2,74% | 2,36% |
| CPMF | 0,02% | 0,04% | 0,04% | 0,03% |
| Custo Total | 4,04% | 6,48% | 5,21% | 4,41% |

Tabela 5.9 Custos operacionais médios em 10.000 trajetórias de preços simuladas a partir de modelos estimados para agentes tipo 2 (descapitalizados).

| | CT | CMARGEM | TB | TJ | TIRPF | TCPMF | Variação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CT** | 1,00 | | | | | | |
| **CMARGEM** | 0,00 | 1,00 | | | | | |
| **TB** | 0,13 | 0,00 | 1,00 | | | | |
| **TJ** | 0,39 | 0,00 | 0,85 | 1,00 | | | |
| **TIRPF** | 0,19 | 0,00 | -0,84 | -0,83 | 1,00 | | |
| **TCPMF** | 0,47 | 0,00 | 0,87 | 0,76 | -0,54 | 1,00 | |
| **Variação** | 0,13 | 0,00 | 1,00 | 0,84 | -0,84 | 0,87 | 1,00 |

Tabela 5.10 Matriz de correlação amostral entre os componentes do custo do modelo associado contrato MAI03 estimados em 10.000 trajetórias de preço simuladas para agentes tipo 2 (descapitalizados).

| | CT | CMARGEM | TB | TJ | TIRPF | TCPMF | Variação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **CT** | 1,00 | | | | | | |
| **CMARGEM** | 0,00 | 1,00 | | | | | |
| **TB** | 0,21 | 0,00 | 1,00 | | | | |
| **TJ** | 0,49 | 0,00 | 0,85 | 1,00 | | | |
| **TIRPF** | 0,21 | 0,00 | -0,81 | -0,75 | 1,00 | | |
| **TCPMF** | 0,54 | 0,00 | 0,88 | 0,78 | -0,48 | 1,00 | |
| **Variação** | 0,21 | 0,00 | 1,00 | 0,85 | -0,81 | 0,88 | 1,00 |

Tabela 5.11 Matriz de correlação amostral entre os componentes do custo do modelo associado contrato JAN03 estimados em 10.000 trajetórias de preço simuladas para agentes tipo 2 (descapitalizados).

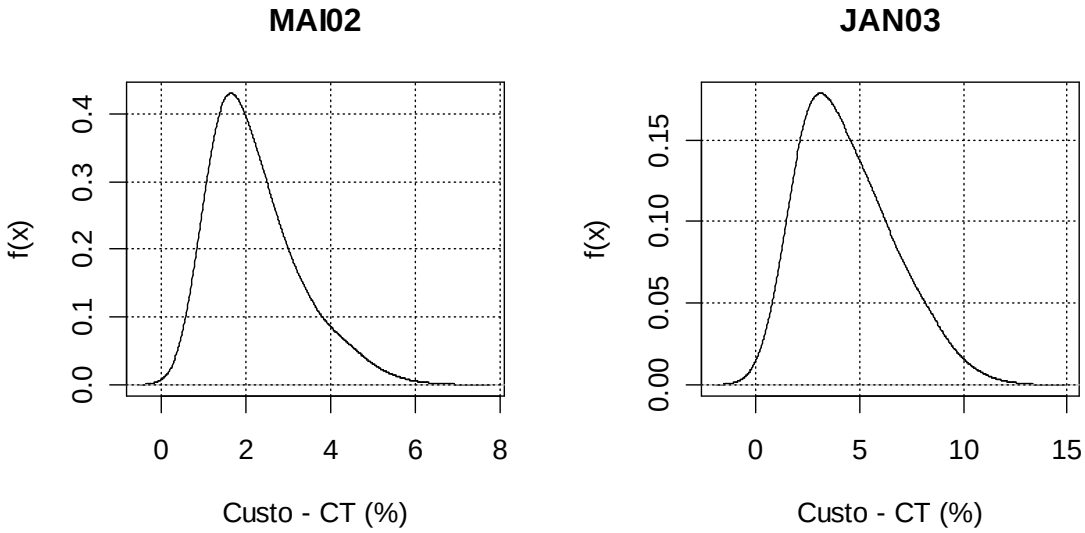


Figura 5.6 Distribuições de probabilidade de custos CT (%) estimadas, a partir das trajetórias simuladas para MAI02 e JAN03, para o agente tipo 1 obtidas pelo modelo simplificado.

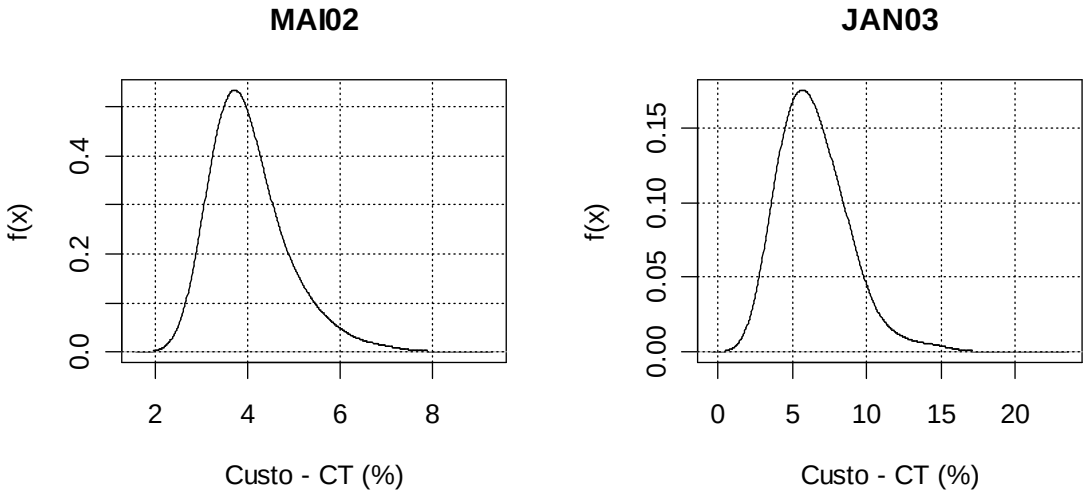


Figura 5.7 Distribuições de probabilidade de custos CT (%) estimadas, a partir das trajetórias simuladas para MAI02 e JAN03, para o agente tipo 2 obtidas pelo modelo simplificado.

| Série | Volatilidade diária | Volatilidade Diária Anualizada |
|---|---|---|
| MAI02 | 0,0109 | 0,1737 |
| JAN03 | 0,0172 | 0,2741 |
| MAR03 | 0,0176 | 0,2804 |
| MAI02 | 0,0135 | 0,2152 |

Tabela 5.12 Volatilidade dos contratos estimada através da trajetória real dos preços (veja texto)

| Componente | Custos como percentagem do valor inicial do contrato (120 dias) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | MAI02 | JAN03 | MAR03 | MAI03 |
| Custo de Margem | 1,72% | 1,27% | 0,99% | 0,92% |
| Taxas da Bolsa | 0,64% | 0,65% | 0,63% | 0,64% |
| Juros líquidos | 0,20% | 0,53% | 0,52% | 0,43% |
| IRPF | 1,40% | 2,15% | 2,31% | 1,76% |
| CPMF | 0,02% | 0,03% | 0,03% | 0,03% |
| Custo Total | 3,99% | 4,65% | 4,50% | 3,77% |

Tabela 5.13 Custos operacionais estimados em 10.000 trajetórias de preços simuladas a partir do modelo simplificado, para agentes tipo 2 (descapitalizados).

**Efeito da volatilidade e número de dias no custo da operação**

Os resultados apresentados mostram que o número de dias da operação e a volatilidade podem afetar a magnitude e a incerteza associadas ao custo de uma operação no mercado futuro. Os efeitos dessa dependência são explorados a seguir, a partir de um modelo teórico que considera que as taxas de variação dos preços seguem o modelo básico especificado em (2.2) a (2.3), correspondente ao caso simples ARIMA(0,0,0)-GARCH(0,0). Nesse modelo, as trajetórias são totalmente determinadas pela volatilidade e pelo valor inicial do contrato. Esse modelo, explorado anteriormente, pode ser útil para o entendimento de certos efeitos, a custa de algumas simplificações.

Para os experimentos realizados, a margem de garantia é definida como 6,2% do valor do contrato, as taxas de juros (a.m.) definidas em $J_a = 1{,}2\%$ e $J_c = 3{,}75\%$, a TOB em 0,3%, os emolumentos em 6,32% da TOB e a taxa de registro como sendo R$ 0,20 por contrato. Foram considerados nos experimentos volatilidades (anualizadas) variando de 0,15 a 0,35 (15 % a 35%) e operações variando de 10 a 120 dias. Os custos totais médios, obtidos a partir de 30 mil simulações, expressos como um percentual do valor inicial do contrato, para os agentes tipo 1 (capitalizado) e tipo 2 (descapitalizado), são apresentados na Figura 5.8. A Figura 5.9 apresenta a estimativa da distribuição de probabilidade do custo total para uma volatilidade anualizada de 25%, em operações com durações distintas. Na Figura 5.10, são apresentados os custos médios de IRPF, expressos como um percentual do valor inicial do contrato.

Esses resultados indicam que o custo tende a ser mais elevado em situações de maior volatilidade e em operações mais longas. Um outro aspecto importante é a grande incerteza que existe no inicio de uma operação quanto ao seu custo, mesmo que sejam perfeitamente conhecidos os parâmetros estatísticos que caracterizam as trajetórias de preços. Isso é evidenciado na Figura 5.9. Essa incerteza aumenta com volatilidades maiores e operações mais longas, se traduzindo num risco de custo, que ao lado do risco de base, pode dificultar operações pelo impedimento de um *hedge* que possa

efetivamente fixar o preço. Esse problema seria menos sério se custo fosse fixo, conhecido exatamente no início da operação, algo que em geral não ocorre.

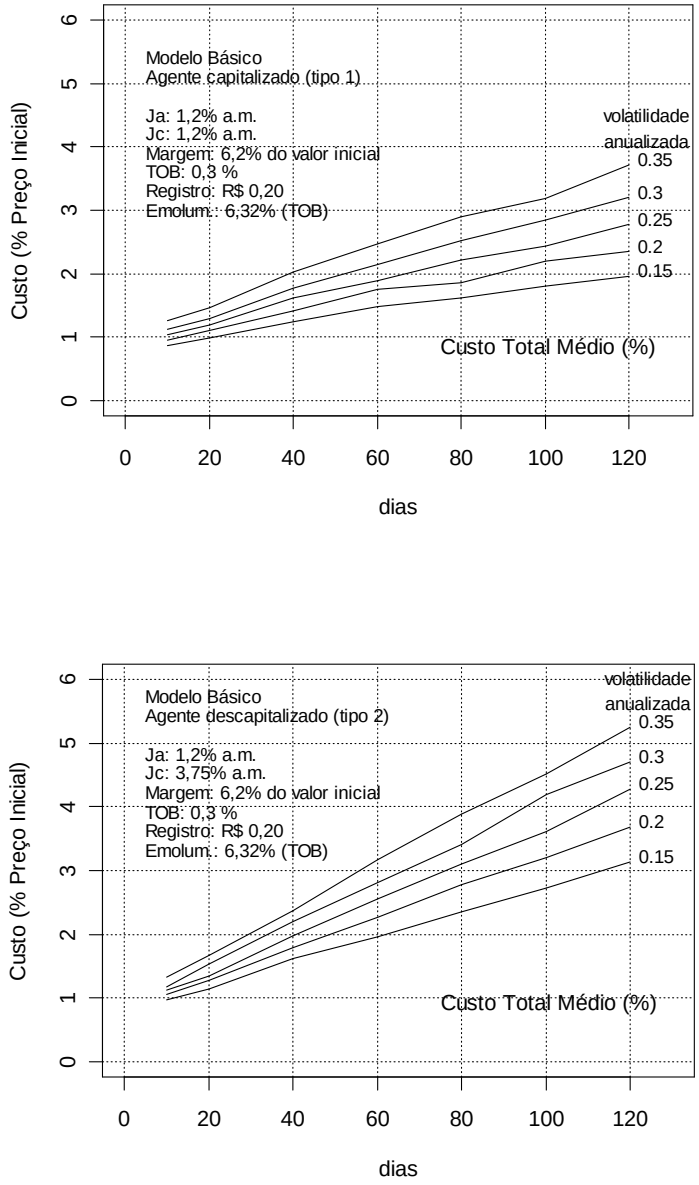


Figura 5.8 Custos totais médios como % do valor inicial do contrato estimados a partir do modelo básico para agentes tipo 1 e 2 (cescapitalizado e descapitalizado).

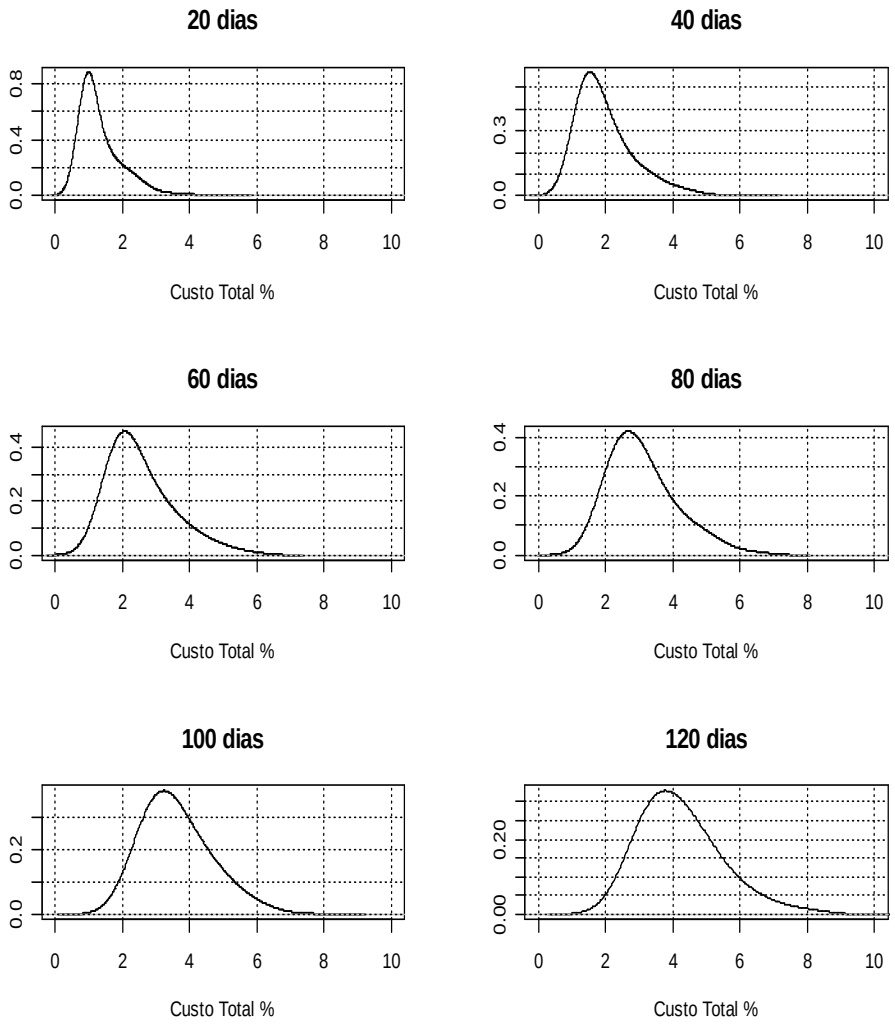


Figura 5.9 Estimativas da distribuição do custo total como % do valor inicial do contrato a partir do modelo básico para agente tipo 2 \(capitalizado) para uma volatilidade anualizada de 0,25, em função do número de dias

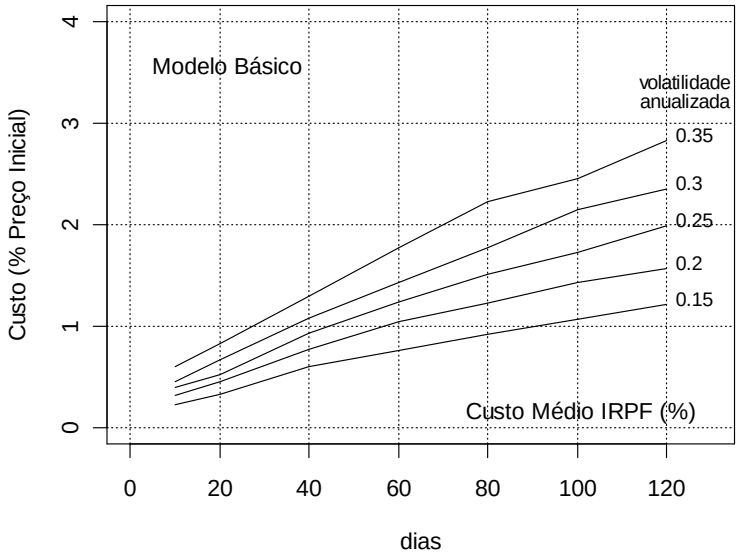


Figura 5.10 Custos de IRPF médios como % do valor inicial do contrato, estimados para diferentes volatilidades e durações de operação. (para agentes tipo 1 e tipo 2)

**Estimativa dos custos de novas operações**

Os procedimentos metodológicos desenvolvidos nas seções anteriores podem ser estendidos para possibilitar estimativa do custo de uma nova operação. Nesse caso, os dados existentes até o momento da operação podem ser analisados e a partir deles estimados os modelos que caracterizem o processo estocástico associado às taxas de variação, com o auxílio, por exemplo, do modelo geral ARIMA-GARCH. As trajetórias seriam simuladas pelo prazo previsto para a operação, considerando as informações existentes no início da operação. Estimativas das distribuições dos componentes dos custos e seus momentos amostrais podem ser obtidos pelos procedimentos anteriormente descritos. A discussão de procedimentos específicos sobre esse processo não é objeto desta pesquisa.

## 6. Considerações finais

O trabalho apresentou procedimentos para caracterização e simulação de trajetórias de preços, fluxos de caixa e custos operacionais, aplicados a operações em mercados futuros. Os modelos utilizados capturam aspectos relevantes de operações reais, com algumas simplificações que tem o objetivo de facilitar a exposição e implementação. Esses modelos foram comparados, verificando-se diferenças obtidas com graus distintos de complexidade e aderência à realidade. Os métodos utilizados foram formalizados com algoritmos apresentados no trabalho, e implementados em software, visando sua aplicação efetiva.

Os custos operacionais estimados neste trabalho referem-se ao caso em que o agente é uma pessoa física, sendo obtidos a partir de procedimentos que consideram a evolução do fluxo de caixa da operação, condicionados por trajetórias de preços: (a) observadas em contratos futuros, (b) simuladas a partir de modelos estatísticos (ARIMA-GARCH) que capturam aspectos relevantes de trajetórias observadas no mercado e (c) simuladas por modelos teóricos que dependem só da volatilidade e do número de dias da operação. Deve-se destacar que os custos operacionais para outros agentes (ex. pessoa jurídica com lucro presumido, pessoa jurídica com lucro calculado, instituições isentas de certos impostos, etc.) podem ser diferentes dos custos operacionais apresentados neste trabalho, sendo assunto de pesquisas futuras.

A metodologia desenvolvida foi utilizada para estimativa de custos associados à margem de garantia, encargos financeiros, imposto de renda, CPMF e taxas operacionais da bolsa, para um agente econômico do tipo pessoa física, operando no mercado futuro. Uma dificuldade existente no cálculo desses custos é o fato de que, em larga medida, alguns de seus componentes – como o imposto de renda e os encargos financeiros – dependem fortemente da trajetória de preços observada em uma operação. Outro problema é a dependência desses custos à situação do agente econômico quanto ao seu grau de necessidade de capital externo. Para agentes descapitalizados, dependentes da captação

de recursos para fazer frente a margens, ajustes, impostos, e gerenciamento dos contratos de um modo geral, os custos tendem a ser mais elevados que para agentes que dispõem de ampla capacidade própria de recursos financeiros.

Os pressupostos utilizados na aplicação dos impostos abstraem certos aspectos da realidade. O relaxamento desses pressupostos, contudo, examinado na pesquisa, mostra impacto mínimo sobre os resultados apresentados. De um modo geral, o impacto maior é no sentido da subestimativa da tributação, especialmente do custo associado à CPMF. Operações reais podem envolver muitas transferências entre contas, o que pode resultar em tributação por CPMF maior que a obtida neste estudo.

Os resultados obtidos sugerem que os custos de operações no mercado futuro podem ser expressivos. Para uma pessoa física, numa operação de 60 dias, sob pressuposições minimalistas, os custos operacionais médios atingiram valores entre 1,5 e 2% do valor inicial do contrato (Figura 5.8, pág. 75), quando a volatilidade anualizada é 20%. Para uma operação com 120 dias, esse custo operacional médio variou entre 2,5 a 3,5%. Para uma volatilidade de 30% os custos médios observados estiveram entre 2,5 a 3% e entre 3 a 4,5%, para 60 e 120 dias, respectivamente. Os valores em cada caso dependem da situação da pessoa física com relação necessidade de captação de recursos – os maiores valores são para agentes descapitalizados. Para obtenção desses resultados foram pressupostas taxas de juros nas aplicações e nas captações, respectivamente, de 1,2% e 3,75% ao mês. Em situações práticas as taxas de captação podem ser muito superiores a esse valor, nas condições atuais do mercado. Do lado das aplicações, assume-se que os saldos positivos de ajustes podem ser investidos à taxa de aplicação considerada (algo facilitado pelo FIF). O uso de pressuposições sobre a dinâmica da evolução dos preços mais próximas à realidade (com modelos mais complexos) levou a estimativas de custos operacionais superiores às apresentadas acima, obtidas pelos modelos simplificados. Esses modelos simplificados foram, contudo, úteis para caracterizar a natureza do impacto da volatilidade e tempo decorrido na operação nos custos da operação. Deve-se destacar que os custos para outros agentes (pessoa jurídica com lucro presumido, pessoa

jurídica com lucro calculado, instituições isentas de certos impostos, etc.) podem ser diferentes desses custos apresentados.

É importante perceber que os custos apresentados acima são aplicáveis às duas contrapartes de uma mesma operação, tanto na posição vendida como na posição comprada. Isso significa que o custo da transação será o dobro dos valores médios obtidos acima. É possível ainda que numa operação os custos operacionais para a posição vendida e a posição comprada sejam diferentes (assimétricos) em função da forma com que os encargos financeiros e a tributação são aplicados. Numa posição de venda, uma trajetória de preços ascendente pode motivar o pagamento de um elevado volume de encargos financeiros pelos recursos necessários para que o agente faça frente aos ajustes necessários. Para o contrato de compra, por outro lado, haveria recebimentos de juros decorrentes da aplicação dos ajustes positivos, mas os desembolsos com tributação seriam elevados. Um exemplo extremo, que destaca esses efeitos, analisado neste trabalho, é ilustrado pelo contrato do milho com vencimento em JAN03, onde o preço passou, em 120 dias, de R$ 16,20 a R$ 27,00. Se uma operação fosse realizada nesse período, para o contrato de venda, os custos associados a encargos financeiros chegariam a 9,85% do valor inicial do contrato, para um agente descapitalizado, e 3,12% para um agente capitalizado (Tabelas 5.3 e 5.4, pág. 60). O IRPF pago seria nulo nesse caso e os custos operacionais totais seriam de 4,18% e 12,2%, para os agentes capitalizados e descapitalizados, respectivamente. Nessa mesma situação, para o contrato de compra, teria havido um recebimento de juros equivalente a 3,57%, e um pagamento de IRPF equivalente a 15,06%, com um custo operacional total de 13,6% do valor inicial do contrato (para todos os agentes). Se os agentes mantivessem suas posições pelos 120 dias, teriam sido esses os custos observados, que curiosamente são diferentes (assimétricos) para posições vendida e comprada, especialmente se as operações envolvem agentes com diferentes graus de capitalização e exposição à tributação.

Um aspecto importante observado é a incerteza expressiva que existe no início da operação quanto ao valor dos custos ao seu final (Figura 5.9). Os resultados mostraram que os custos são incertos no início da operação e podem crescer quando aumenta o

número de dias da operação e a volatilidade. Dependem também da natureza do processo estatístico que caracteriza a variação de preços (para uma mesma volatilidade e número de dias). Essa incerteza aumenta com volatilidades maiores e operações mais longas, se traduzindo num risco de custo, um conceito aparentemente novo e particularmente importante para as operações no Brasil.

O risco de custo pode, ao lado do risco de base e outros custos de transação, dificultar operações pelo impedimento de um *hedge* que possa efetivamente fixar o preço (e margens em operações). Esse problema seria menos sério se custo fosse fixo, conhecido exatamente no início da operação, algo que em geral não ocorre.

Há algumas implicações econômicas importantes decorrentes de custos expressivos, incertos e assimétricos entre agentes, em operações em mercados futuros. Custos elevados e incertos tendem a reduzir o benefício de uma operação de fixação de preços via mercados futuros, inibindo negociações e favorecendo a fixação de preços por outros mecanismos que podem garantir preços (e eventualmente adiantar recursos) com certeza e menos tributados: CPRs, fixação de preços junto a *traders* e processadores, etc. Os preços fixados por esses outros mecanismos, contudo, incorporam deságios que podem ser, em parte, motivados pelos custos e incertezas existentes na fixação de preços pelo mercado futuro. Agentes econômicos mais capitalizados e/ou menos expostos a tributos, podem ser mais estimulados a utilizar o mercado futuro que agentes descapitalizados e/ou mais expostos à tributação. Essa situação é de uma certa forma perversa, pois mostra que há barreiras de acesso ao mercado futuro (via custos de operação mais elevados) para muitos agentes que potencialmente poderiam se beneficiar bastante dessas operações (ex. produtores rurais do tipo pessoa física). Para trabalhos que estimam a razão ótima de *hedge* as implicações podem ser grandes, em decorrência de que em geral assumem custos baixos e fixos nas operações. Um entendimento mais completo das implicações econômicas desses resultados, contudo, exigirá um esforço de pesquisa que foge ao escopo deste trabalho.

Deve-se destacar que na literatura internacional os custos operacionais em mercados futuros tendem a ser praticamente desconsiderados em função de sua pequena magnitude, quando comparados a outros custos (veja, por exemplo, Nelson, 1985). Essa pressuposição nos parece ser pouco realista para o caso brasileiro. Cabe discutir aqui algumas razões que motivam esses custos elevados e incertos, em magnitude muito superior à observada em outros países.

A primeira razão deve-se a: (a) taxas de juros elevadas praticadas no Brasil, em geral muito acima das taxas praticadas em outros países; e, (b) diferença significativa existente entre as taxas para aplicação e captação. Esses dois fatos encarecem as operações significativamente, especialmente para os agentes econômicos descapitalizados, que precisam captar recursos para manutenção de suas operações de fixação de preços. As taxas de juros afetam os componentes de custo operacional associado à margem de garantia, gestão dos ajustes diários e do fluxo de caixa em geral. Os custos associados à margem podem, contudo, ser conhecidos com muita certeza no início de uma operação, o que não acontece com os custos decorrentes de encargos financeiros dependentes do fluxo de caixa, que são incertos. Numa posição de venda, uma trajetória de preços ascendente pode motivar uma substancial demanda por recursos para fazer frente a ajustes necessários. Em situação analisada neste trabalho, correspondente ao contrato do milho com vencimento em JAN03, onde o preço passou, em 120 dias, de R$ 16,20 a R$ 27,00, os custos associados a encargos financeiros chegariam a 9,85% do valor inicial do contrato, para um agente descapitalizado, e 3,12%, para um agente capitalizado, para manutenção do *hedge* (Tabelas 5.3 e 5.4). As distorções existentes nas taxas de juros acabam tendo como a conseqüência perversa o afastamento do mercado futuro dos agentes econômicos mais descapitalizados, que em muitos casos são os que mais podem se beneficiar das operações nesses mercados.

A segunda razão deve-se à tributação. No caso do imposto de renda, analisado neste trabalho, em operações envolvendo pessoas físicas, o tributo é elevado e produz distorções. Da forma que é definido, o imposto acaba motivando uma parte considerável do custo operacional e da incerteza em uma operação, favorecendo com isso a utilização

de outras formas de fixação de preços que não são tão severamente tributadas, e mesmo a sonegação. Como o imposto depende da trajetória seguida pelos preços, contribui significativamente para o componente incerto do custo da operação, aumentando a incerteza com relação ao custo operacional observado. Não é nada claro o benefício econômico existente para justificar a tributação de operações através dos mecanismos existentes, que acaba inibindo operações que são importantes para reduzir riscos em muitas situações.

Os procedimentos desenvolvidos podem ser estendidos para a análise de outras situações envolvendo agentes que são pessoa jurídica, com diferentes regimes de tributação. Os custos operacionais para esses agentes podem ser diferentes em função de que os mecanismos de tributação utilizados em cada caso têm características muito peculiares. A extensão dos procedimentos para esses casos e outros casos, contudo, é assunto para futuros trabalhos.

Finalmente, um mérito importante deste trabalho é sugerir, através dos procedimentos propostos, que o custo de operações no mercado futuro, no Brasil, pode ser muito superior a valores práticos freqüentemente discutidos (ex. 0,64%), que tendem a considerar simplesmente as taxas da bolsa (TOB, registro e emolumentos). Além da pesquisa apresentar uma estimativa desses custos operacionais, argumentando que podem ser elevados, mostra também que são incertos no início da operação, caracterizando um risco de custo que juntamente como o risco de base podem dificultar operações em mercados futuros. Ao considerarmos que as 2 contrapartes da operação estão sendo oneradas, o custo transacional associado à operação (podem existir outros) acaba sendo a soma dos custos operacionais de cada contraparte, o que amplifica o problema. Um outro aspecto interessante é que para uma dada trajetória de preços os custos operacionais podem ser assimétricos para a posição vendida e a posição comprada. Esforços na direção da mitigação desses custos e de sua incerteza podem favorecer um maior interesse pela utilização dos mercados futuros como mecanismo de fixação de preços futuros. Iniciativas como o FIF e o uso do Funcafé para financiamento de margens e ajustes (no caso do café) podem ser importantes para a redução do custo operacional. Com relação à

tributação pelo IRPF, é difícil entender a justificativa econômica para o mecanismo utilizado, que pode introduzir distorções econômicas desnecessárias e inibir operações nos mercados futuros importantes para a redução de riscos.

## Agradecimentos

À Felix Schouchana, diretor de mercados agrícolas da BM&F, por chamar a atenção dos autores sobre a importância dos tributos, margem de garantia e ajustes diários, dentro das operações no mercado futuro e sobre o interesse existente para a adequada quantificação desses componentes no custo de operações em mercados futuros. Ao FAPGREP-FEALQ, pelo financiamento parcial da pesquisa.

## Referências Bibliográficas

ALEXANDER, S. **Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks**. Industrial Management Review 2(May):7-26, 1962.

ANDERSEN, T.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F. X. **Parametric and Non-Parametric Volatility Measurement**. National Bureau of Economic Research, Working Paper No. 279, 2002 (será publicado no Handbook of Financial Econometrics, 2004)

ANDERSEN, T.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F. X.; LABYS, P. Modeling and Forecasting Realized Volatility. **Econometrica** (71):529-626, 2003

AZEVEDO-FILHO, A. **Seguros Fundamentados em Índices de Produtividade e Renda Agrícola Regional com Instrumentos para Administração de Riscos no Brasil**. Relatório de Pesquisa, Projeto FAPESP/CNPq, 140p. 2002.

BACHELIER, L. Théorie de la Spéculation. **Annales de l'Ecole Normale Superioure,** 3(17): 21-86, 1900.

BERNSTEIN, P. L. **Capital Ideas.** New York: The Free Press, 1992.

BROCK, W.; LAKONISHOK, J.; LEBARON, B. Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns. **Journal of Finance**, 1992.

BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. **Journal of Econometrics** (31):307-327, 1986.

BOX, G.; JENKINS, G. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. San Francisco: Holden Day, 1976.

BRATLEY, P; FOX, B. L.; SCHRAGE, L. E. **A Guide to Simulation.** Springer-Verlag, 1987.

CARGILL, T.F. and RAUSSER, G.C. Temporal Price Behaviour in Commodity Futures Markets. **Journal of Finance.** 30, 1043-1053, 1975.

CLARKE, J.; JANDIK, T.; MANDELKER, G. The Efficient Market Hipothesis. In: R. ARFFA (ed.). Expert Financial Planning: Advice from Industry Leaders. New York: Wiley & Sons, 126-141, 2002. (efm3.pdf)

COURTAULT, J. M.; KABANOV, I.; BRU, B.; CREPEL, P.; LEBON, I.; MARCHAND, A. **Louis Bachelier: On the Centenary of *Theory of Speculation*.** Mathematical Finance, 10(3):341-353, 2000.

COWLES, A. **Can Market Forecasters Forecast?** Econometrica 1:309-324, 1934.

DUFFIE, D. **Futures Markets**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.

DIMSOM, E; MUSSAVIAN, M. Market Efficiency. **The Current State of Business Disciplines**, 3:959-970, 2000.

ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. **Econometrica** (50):987-1008, 1982.

ENGLE, R. F.; GRANGE, C. W. Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. **Econometrica** (55):251-276, 1987.

ENGLE, R. F. GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. **Journal of Economic Perspectives** 15(4):157-168, 2001.

EGELKRAUT, T. M.; GARCIA, P.; IRWIN, S. H. ; GOOD. D. L. An Evaluation of Crop Forecasts for Corn and Soybeans: USDA and Private Information Services. **The Journal of Agricultural and Applied Economics**, 35(1): 79-95, 2003.

FAMA, E. F. The Behavior of Stock Market Prices. **Journal of Business,** 38:34-105, 1965.

FAMA, E. F. Efficient Capital Markets – II. **Journal of Finance**, 46(5): 1575-1617, 1991.

GRANGER, C. W. J.; MORGENSTERN, O. Spectral Analysis of New York Stock Market Prices. **Kyklos**, 16:1-27, 1963.

GRANGER, C. W. J.; NEWBOLD, O. Spurious Regressions in Econometrics. **Journal of Econometrics**, 2:111-120, 1974.

GROSSMAN, S.; STIGLITZ, J. E. On the Impossibility of Informationally Efficient Markets. **American Economic Review**, 70(3): 393-408, 1980.

HAMILTON, J. D.. **Time Series Analysis**. Princeton: Princeton University Press, 1994.

HUANG, C.; LITZENBERGER, R. H. **Foundations of Financial Economics**. New York: North Holland, 1988.

HULL, J. **Options, Futures and Other Derivative Securities**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989, 1997.

INGERSOLL, J. E. **Theory of Financial Decision Making**. Savage: Rowman & Littlefield Publishers Inc. 1987.

IMAN, R.L.; CONOVER, W.J. A distribution free approach to inducing rank correlation among input variables. **Commun. Statist.-Simula. Computa.** (Marcel Dekker, Inc.), 11(3): 311-334, 1982.

JENSEN, J. The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964. **Journal of Finance**, 23(2):389-416, 1967.

KENDAL, J. The Analysis of Economic Time Series, Part I: Prices. **Journal of the Royal Statistical Society**, 96:11-25, 1953.

LAURENT, S.; PETERS, J.P. G@RCH 2.2: an Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models. ***Journal of Economic Surveys***, 16(3):447-485, 2002.

LAW, A. M.; KELTON, W. D. **Simulation Modeling & Analysis**. McGraw-Hill, Inc, 1992.

LENCE, S. H. The Economic Value of Minimum-Variance Hedges. **American Journal of Agricultural Economics**, 77 (May 1995), p. 353-364, 1995

LENCE, S. H.; HAYES, D. J. The Empirical Minimum-Variance Hedge. **American Journal of Agricultural Economics**, 76 (February 1994), p. 94-104. 1994

LEUTHOLD, R.M. Random Walks and Price Trends: The Live Cattle Futures Market. **Journal of Finance**. 27, 879-889, 1991

LIMA, L. A. O. Auge e Declínio da Hipótese dos Mercados Eficientes. **Revista de Economia Política**. 23(4): 28-42, 2003.

MANDELBROT, B. Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and "Martingale" Models. **Journal of Business**, 39(1-2):232-255, 1966.

MILLS, T. C. **The Econometric Modelling of Financial Time Series**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

MOOD, A.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. **Introduction to the Theory of Statistics**. New York: McGraw-Hill, 1974.

NELSON, R. D. Forward and Futures Contracts as Preharvest Commodity Marketing Instruments. **American Journal of Agricultural Economics**, 67(1):15-23, 1985.

OSBORNE, M. M. Brownian Motion in the Stock Market. **Operations Research,** 7:145-173, 1959.

OLIVEIRA, A. F. **Modelos para estimar a razão de hedge de variância mínima: aplicação para mercados futuros agropecuários**. Dissertação de mestrado, ESALQ, Piracicaba, junho de 2000.

ROBERT, C. P. e CASELLA, G. **Monte Carlo Statistical Methods**. New York: Springer Verlag Inc., 1999.

SAMUELSON, P. Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. **Industrial Management Review,** 6:41-49, 1965.

SCOTT, D. W. Multivariate Density Estimation. Theory, Practice and Visualization. New York: Wiley, 1992.

SILVERMAN, B. W. **Density Estimation**. London: Chapman and Hall, 1989.

SIMON, H. **The Sciences of the Artificial**. Cambridge: MIT Press, 3ª. edição, 1996.

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **Annals of Statistics**, 6:461-464, 1978.

TAYLOR, S.J. The Behavior of Futures Prices Over Time. **Applied Economics**, 17, 713-734, 1985.

WEST, M.; HARRISON, J. **Bayesian Forecasting and Dynamic Models**. Spring-Verlag, 1989 e 1997.

WORKING, H. A Random-Difference Series for Use in the Analysis of Time Series. **Journal of the American Statistical Association**, 29:11-24, 1934.

WORKING, H. A Note on the correlation of the first difference of averages in a random chain. **Econometrica**, 28:916-918, 1960.

# Apêndice

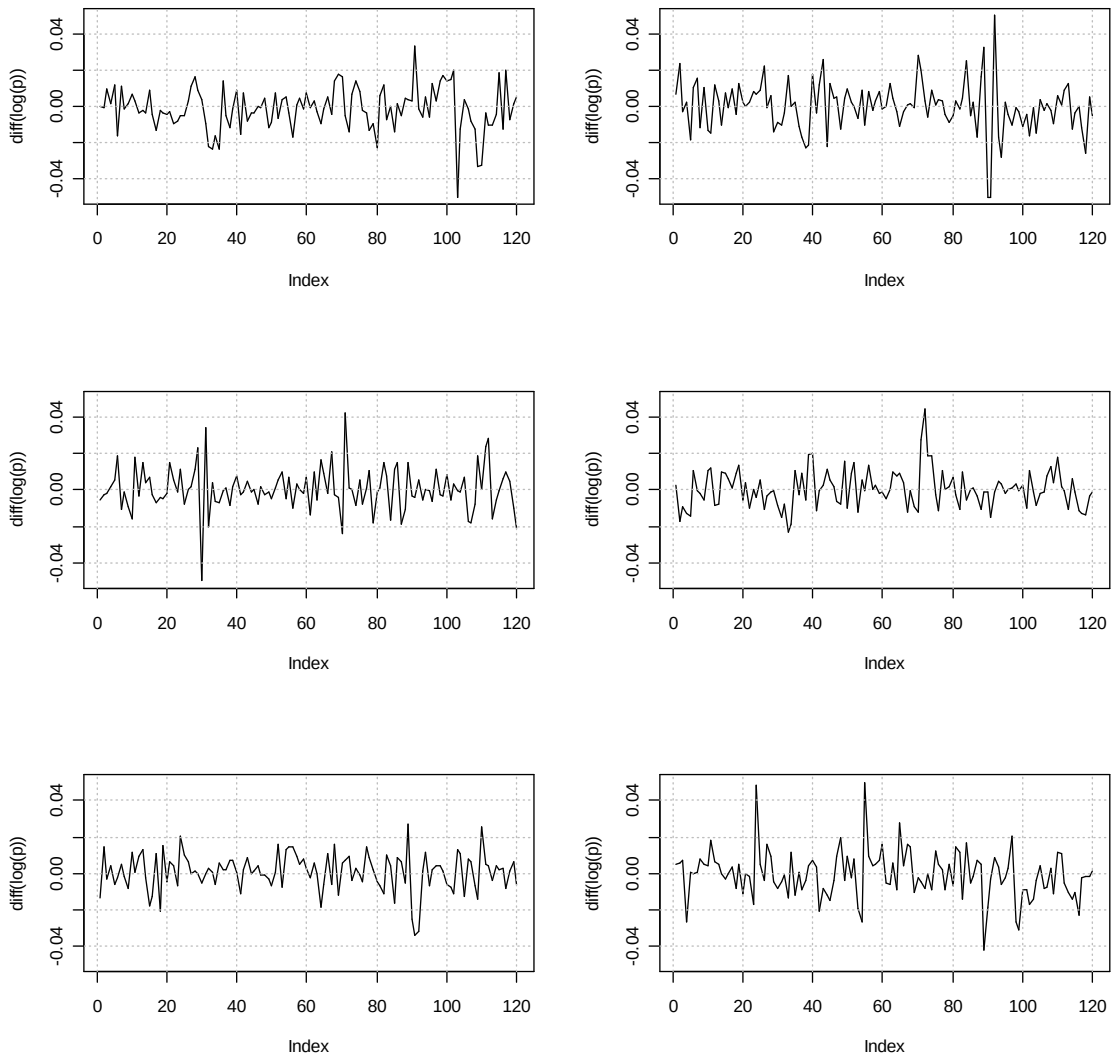


Figura A.1 Algumas trajetórias simuladas a partir do modelo estimado para MAI02

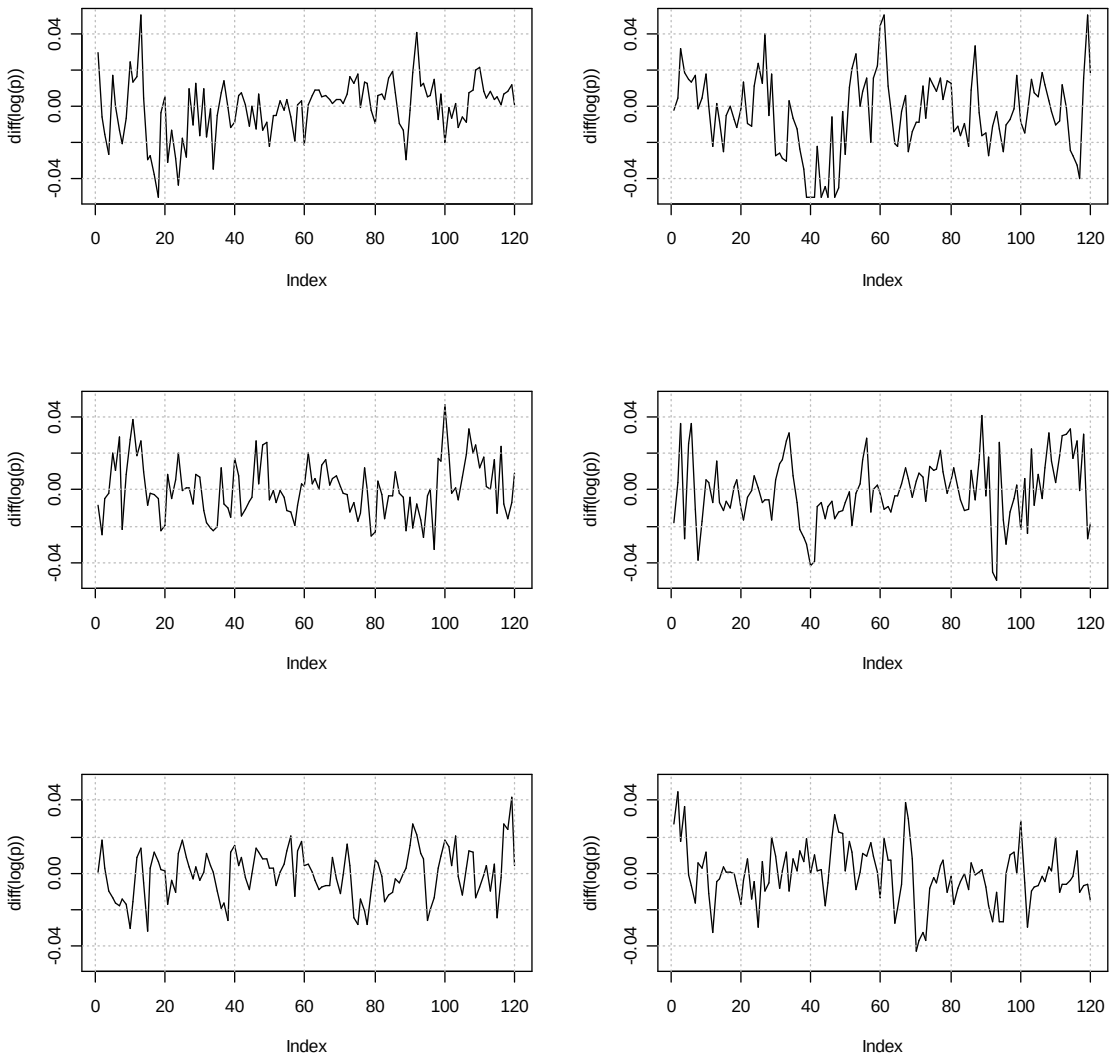


Figura A.2 Algumas trajetórias simuladas a partir do modelo estimado para JAN03

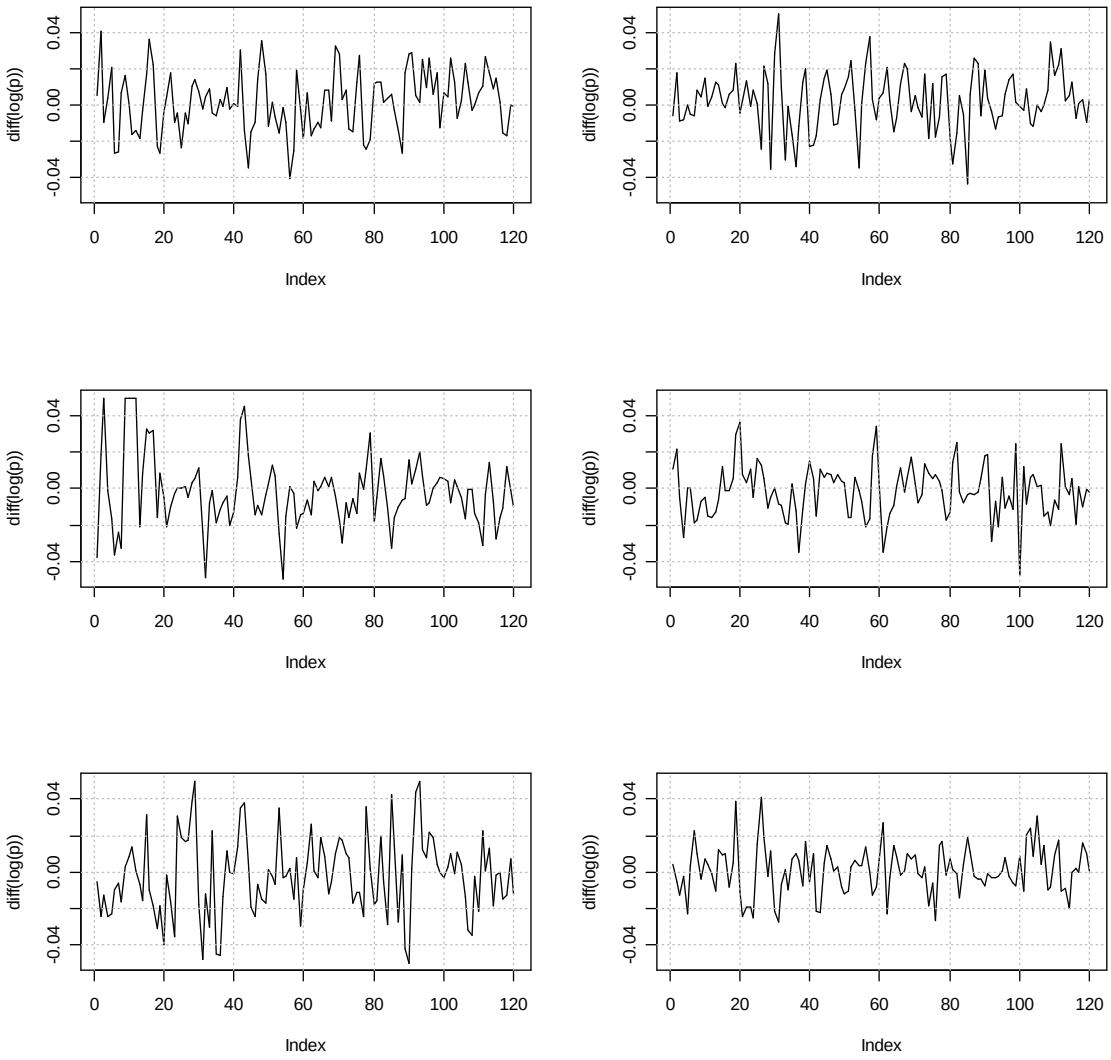


Figura A.3 Algumas trajetórias simuladas a partir do modelo estimado para MAR03

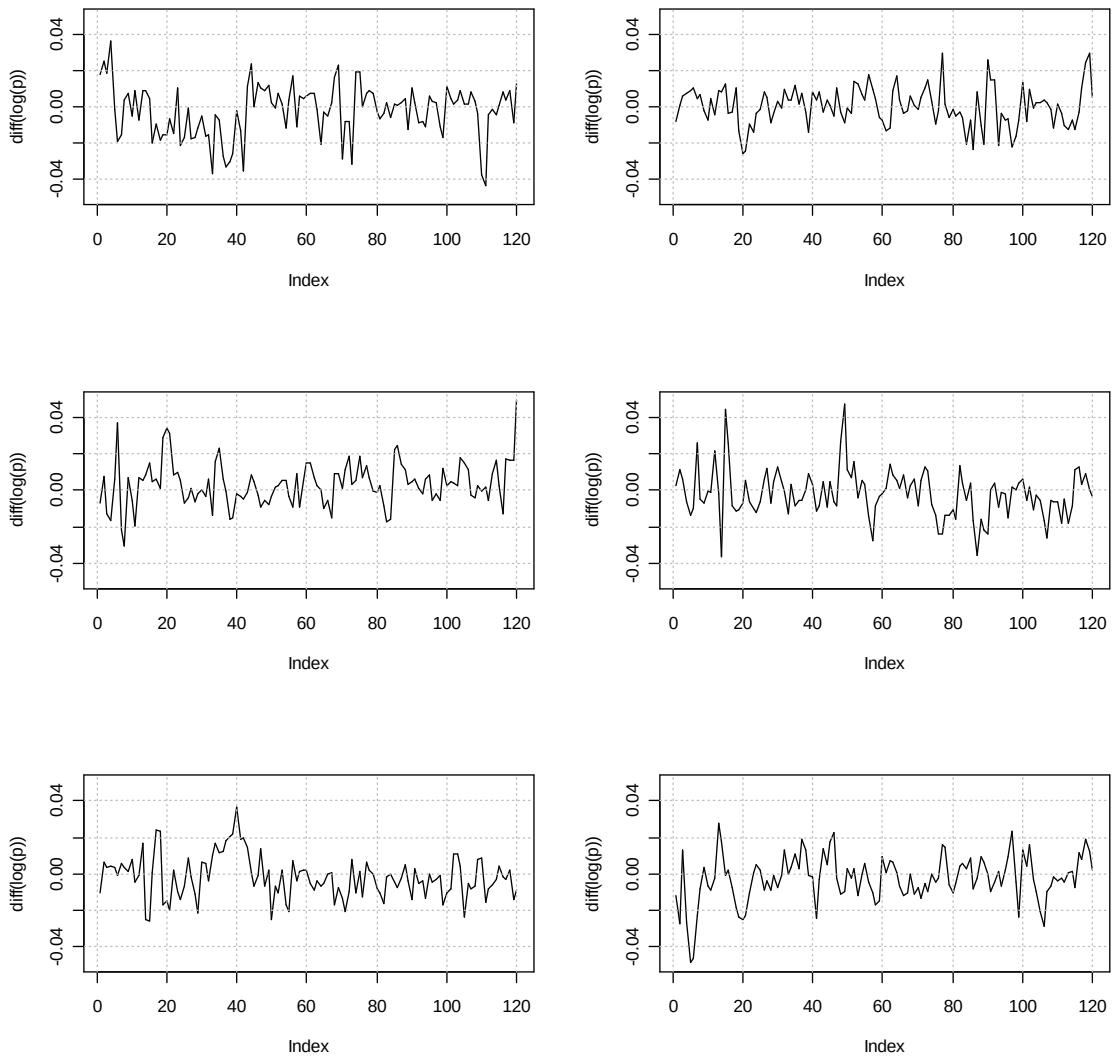


Figura A.4 Algumas trajetórias simuladas a partir do modelo estimado para MAI03

**Implicações de custos elevados e incertos para a razão ótima de hedge**

Dentro de uma operação de *hedge* de venda, o resultado obtido é definido por

$$R(\lambda) = P_t^s + \lambda(P_0^f - P_t^f) - CT(\lambda) \tag{4.21}$$

onde $P_t^s$ e $P_t^f$ são os preços observados no mercado físico e no mercado futuro no período *t*, $P_0^f$ é o preço do contrato no início da operação, $\lambda$ é a razão de *hedge* e $CT(\lambda)$ são os custos de transação (aqui representados pelos custos operacionais), que são dependentes de $\lambda$. Dentro dos desenvolvimentos realizados a seguir, o componente de custo será representado por

$$CT(\lambda) = \lambda(\overline{c} + h\xi_c) + c_f \; I_{\lambda \neq 0}(\lambda) \tag{4.22}$$

onde $\overline{c}$ representa a esperança matemática do custo e $\xi_c$ um desvio aleatório, com esperança matemática zero e variância 1, *h* é uma constante, $I_{\lambda \neq 0}(\lambda)$ é uma função indicadora que assume valor 1 quando $\lambda \neq 0$ e zero quando $\lambda = 0$, e $c_f$ é um componente de custos fixo dependente na realização de algum *hedge*. A variância de $CT(\lambda)$ é definida por $\lambda^2 h^2$. Essa formulação tem o objetivo de decompor o custo em componentes fixos e incertos, sem perda de generalidade, de forma que os impactos desses 2 componentes na razão ótima de *hedge* possam ser mais facilmente identificados.

Para um agente cujas preferências podem ser modeladas pelo paradigma da esperança da utilidade, a razão ótima de *hedge*, representada aqui por $\lambda^*$, é o valor (possível) de $\lambda$ que leva o valor de $EU(R(\lambda))$ ao máximo, ou seja,

$$\lambda^* = \max_{\lambda \in \Omega_\lambda}{}^{-1} EU(R(\lambda)) \tag{4.23}$$

onde $EU(R(\lambda))$ é a função que representa as preferências do agente e $\Omega_\lambda$ é o conjunto que define os valores possíveis de $\lambda$.

**Caso 1: *Hedge* sem custos e sem risco de base**

A situação mais simples possível com relação à razão ótima de *hedge* é caracterizada pelo caso em que os custos da operação são nulos e inexistem riscos de base, ou seja, o preço recebido na transação no mercado físico, $P_t^s$, é idêntico ao preço recebido no mercado futuro e $P_t^f$

Se assumirmos que as preferências dependem somente da esperança e da variância do resultado, ou seja,

$$EU(R(\lambda)) = E(R(\lambda)) - \frac{r}{2} V(R(\lambda)) \tag{4.24}$$

onde *r* é um coeficiente de aversão ao risco absoluto (do tipo Arrow-Pratt). Os parágrafos seguintes exploram 3 situações distintas quanto à natureza dos custos operacionais. Na primeira situação, assume-se que o custo é nulo. Na segunda situação assume-se que o custo é fixo, igual a $\overline{c}$ (nesse caso *h*=0). Na terceira situação assume-se o modelo completo, com custos não nulos e incertos. Para facilitar a exposição, será assumido também $c_f = 0$ (custos fixos nulos) e $E(P_t^f) = P_0^f$, ou seja, o preço no período 0, no mercado futuro, é um estimador não tendencioso do preço no período *t*.

**Razão ótima de hedge com custos nulos**

Com custos nulos temos uma simplificação de (4.21) por

$$R(\lambda) = P_t^s + \lambda(P_0^f - P_t^f), \tag{4.25}$$

e preferências representadas por (4.24), chega-se a

$$EU(R(\lambda)) = E(P_f^s) - \frac{r}{2}(\sigma_s^2 + \lambda^2\sigma_f^2 - 2\lambda\sigma_{sf}). \tag{4.26}$$

A razão ótima de *hedge* será o valor de $\lambda^*$ que soluciona (4.23). Essa solução pode ser obtida pela análise das condições de primeira ordem, dada por

$$\lambda\sigma_f^2 - \sigma_{sf} = 0$$

As condições de segunda ordem, obtidas a partir da derivada segunda de (4.26), com relação a $\lambda$, que é estritamente negativa nesse caso, garantem ser (4.26) uma função estritamente côncava em relação a $\lambda$. Com isso, qualquer máximo local será também um máximo global, atendidas as restrições a respeito dos valores possíveis para $\lambda$. O resultado das condições de primeira ordem, (4.26)

$$EU(R(\lambda)) = E(P_f^s) - \lambda\bar{c} - \frac{r}{2}(\sigma_s^2 + \lambda^2\sigma_f^2 + \lambda^2h^2 - 2\lambda\sigma_{sf} - 2\lambda h\sigma_{s\xi} + 2\lambda^2 h\sigma_{f\xi})$$

o mercado futuro preferências do agente com relação ao *hedge* poderão ser expressas, a partir de (4.21) e (4.22), por

$$EU(R(\lambda)) = E(P_f^s) - \lambda\bar{c} - \frac{r}{2}(\sigma_s^2 + \lambda^2\sigma_f^2 + \lambda^2h^2 - 2\lambda\sigma_{sf} - 2\lambda h\sigma_{s\xi} + 2\lambda^2 h\sigma_{f\xi}) \tag{4.25}$$

onde $\sigma_s^2, \sigma_f^2$ e $\lambda^2h^2$ representam, respectivamente, as variâncias do preço no mercado físico, futuro e de $CT(\lambda)$, e $\sigma_{sf}, \sigma_{s\xi}$ e $\sigma_{f\xi}$ representam, respectivamente, as covariâncias duas a duas do preço no mercado físico, futuro e de $\xi_c$.

Os parágrafos seguintes

Através das condições de primeira ordem, a razão ótima de *hedge* será obtida por:

$$\lambda^* = \frac{1}{\sigma_f^2 + h^2 + 2h\ \sigma_{f\xi}}(\sigma_{sf} + h\ \sigma_{s\xi} - \frac{\overline{c}}{r})$$

$$\lambda^* = \frac{1}{\sigma_f^2 + h^2 + 2h\,\rho_{f\xi}\sigma_f}(\sigma_{sf} + h\,\rho_{s\xi}\sigma_s - \frac{\overline{c}}{r}) \qquad (4.26)$$

caso $\lambda^* \in \Omega_\lambda$, ou um dos pontos extremos de $\Omega_\lambda$, caso $\lambda^* \in \Omega_\lambda$. Em particular, quando $\Omega_\lambda = [0,1]$, os pontos extremos correspondem às situações em que não se faz *hedge* $(\lambda = 0)$ ou se faz o *hedge* completo $(\lambda = 1)$.

Se os custos são fixos (sem incerteza), a expressão (4.26) poderia ser simplificada para

$$\lambda^* = \frac{\sigma_{sf}}{\sigma_f^2} = \rho_{sf}\frac{\sigma_s}{\sigma_f} \qquad (4.27)$$

que é a solução teórica para o "a razão de hedge que leva à variância mínima", na ausência de custos de transação.